Mathematik für Informatiker

16. Übung – Bestimmte Integrale, Uneigentliche Integrale, Anwendungen

---

1. Berechnen Sie die Integrale mittels der Definition

$$I_1 = \int_0^a x^2 dx \quad (a > 0), \qquad \textbf{HA:}\ I_2 = \int_1^3 (ax+b)dx \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

2. **HA:** Berechnen Sie die Fläche, die von den Parabeln $f(x) = 2 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ eingeschlossen wird.

3. Berechnen Sie

HA: a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x|dx$ b) $\displaystyle\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ c) $\displaystyle\int_{o}^{1} \frac{xdx}{a+bx}$ d) $\displaystyle\int_{o}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

4. Zeigen Sie folgende Abschätzungen

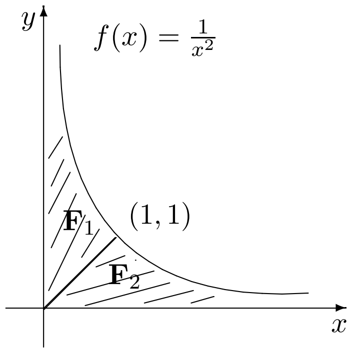
a) $\displaystyle\frac{1}{2} < \int_{o}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}$ b) $\displaystyle\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$

5. **HA:** Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_{x}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$?

6. Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_a^x \arctan y\, dy.$$

7. Untersuchen Sie, ob die in der Abbildung schraffierten Flächen F_1 und F_2 einen endlichen Flächeninhalt besitzen.



8. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale bzw. zeigen Sie deren Divergenz:

a) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ b) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ c) $\int\limits_\pi^\infty \sin x dx$

d) $\int\limits_0^\infty e^{-kx} dx \; (k > 0)$ **HA:** e) $\int\limits_0^\infty e^{ax} \sin bx \, dx \; (a < 0)$ f) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$

HA: g) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^\infty \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ **HA:** h) $\int\limits_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ **HA:** i) $\int\limits_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

9. Bestimmen Sie alle differenzierbaren, reellwertigen Funktionen $f(x)(x \geq 0)$, welche der folgenden Integralgleichung genügen:

$$\int\limits_0^x t f(t) dt = f(x) - \frac{x^2}{2}$$

   HA: Überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

10. Ein Malermeister soll einen unendlichen Trichter, der bei Rotation des Graphen der Funktion $z : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $z(y) = \frac{1}{y}$, um die y-Achse entstanden ist, rot einfärben. Er befragt seinen intelligenten Lehrling ob er den Trichter anmalen oder mit Farbe füllen sollte! Dieser löst zwei leichte Aufgaben und trifft dann eine Entscheidung! Welche und warum?

11. **HA:** Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Rotationskörpers R, der bei Rotation des Graphen der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ und die x-Achse entsteht!

12. Berechnen Sie mit Hilfe eines Kurvenintegrals den Umfang

   HA: a) des Kreises mit Radius a, $(a > 0)$,

   b) der Astroide: $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, $(0 \leq t \leq 2\pi, \; a > 0)$.

13. Berechnen Sie die Länge folgender Kurven

   a) $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t} \quad (0 \leq t < \infty)$,

   HA: b) Stück einer Schraubenlinie der Ganghöhe $2\pi h \quad (h > 0)$:
   $x = r \cos t, y = r \sin t, z = ht \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$,

   HA: c) Stück der Neilschen Parabel $y = x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leq x \leq 4)$

Zusatz:

Sei $f(x)$ eine positive, stetige Funktion. Man zeige $\varphi(x) := \frac{\int_o^x t f(t) dt}{\int_o^x f(t) dt}$ wächst für $x \geq 0$.