

15. Übung – Stammfunktionen, Integrationsmethoden

---

1. Man bestimme mit Hilfe (elementarer) Zurückführung auf Grundintegrale

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx, & \text{HA: b) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx, \\ \text{c) } \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx, & \text{HA: d) } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx, \\ \text{e) } \int \tan^2 x dx, & \text{f) } \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx. \end{array}$$

**HA:** Überprüfen Sie die Ergebnisse!

2. Man bestimme mit Hilfe geeigneter Substitutionen

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, & \text{b) } \int \frac{xdx}{3-2x^2}, & \text{c) } \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx, \\ \text{HA: d) } \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}, & \text{e) } \int \tan x dx, & \text{HA: f) } \int \sin^5 x \cos x dx. \end{array}$$

3. Man bestimme mit Hilfe der Methode der partiellen Integration

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int x^2 e^{-2x} dx, & \text{b) } \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx, \\ \text{HA: c) } \int \sqrt{x} \ln^2 x dx, & \text{d) } \int \arctan x dx, \\ \text{e) } \int \sin x \ln(\tan x) dx, & \text{HA: f) } \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx, \\ \text{HA: g) } \int \cos^2 x dx, & \text{HA: h) } \int e^{ax} \sin bx dx \quad (a, b \neq 0). \end{array}$$

4. Man berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx, & \text{HA: b) } \int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \\ \text{c) } \int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}, & \text{d) } \int \left(\frac{x}{x^2 + 3x + 2}\right)^2 dx, \\ \text{HA: e) } \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}, & \text{HA: f) } \int \frac{dx}{x^4 + 1}. \end{array}$$

5. Man berechne

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx, & \text{HA: b) } \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} dx, \\ \text{HA: c) } \int \frac{1+x}{1-x} dx, & \text{d) } \int \frac{2x+5}{x^2+4x+5} dx, \\ \text{HA: e) } \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx, & \text{f) } \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}. \end{array}$$

6. Es gilt  $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ . Aber bei Substitution  $\sin x = t$  erhält man

$$\int_0^\pi \sin x dx = \int_0^0 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \quad ! \text{ Wo steckt der Fehler?}$$

7. **HA:** Unter welcher Bedingung ist  $I(x) = \int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$  eine rationale Funktion?