Mathematik für Informatiker

15. Übung – Stammfunktionen, Integrationsmethoden

---

1. Man bestimme mit Hilfe (elementarer) Zurückführung auf Grundintegrale

   a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx$, **HA:** b) $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\ dx$,

   c) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\ dx$, **HA:** d) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\ dx$,

   e) $\int \tan^2 x\ dx$, f) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\ dx$.

   HA: Überprüfen Sie die Ergebnisse!

2. Man bestimme mit Hilfe geeigneter Substitutionen

   a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$, b) $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$, c) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ dx$,

   HA: d) $\int \frac{dx}{x\ \ln x\ \ln(\ln x)}$, e) $\int \tan x dx$, **HA:** f) $\int \sin^5 x\cos x dx$.

3. Man bestimme mit Hilfe der Methode der partiellen Integration

   a) $\int x^2 e^{-2x}\ dx$, b) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\ dx$,

   HA: c) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\ dx$, d) $\int \arctan x\ dx$,

   e) $\int \sin x\ln(\tan x)\ dx$, **HA:** f) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\ dx$,

   HA: g) $\int \cos^2 x\ dx$, **HA:** h) $\int e^{ax}\sin bx\ dx\ (a,b\neq 0)$.

4. Man berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

   a) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\ dx$, **HA:** b) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

   c) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$, d) $\int \left(\frac{x}{x^2+3x+2}\right)^2\ dx$,

   HA: e) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}$, **HA:** f) $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

5. Man berechne

   a) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\ dx$, **HA:** b) $\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}\ dx$,

   HA: c) $\int \frac{1+x}{1-x}\ dx$, d) $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}\ dx$,

   HA: e) $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\ dx$, f) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

6. Es gilt $\int\limits_0^\pi \sin x dx = 2$. Aber bei Substitution $\sin x = t$ erhält man

   $\int\limits_0^\pi \sin x dx = \int\limits_0^0 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = 0$! Wo steckt der Fehler?

7. **HA:** Unter welcher Bedingung ist $I(x) = \int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ eine rationale Funktion?