Mathematik für Informatiker

14. Übung – Ableitungen, Regel von l'Hospital, Extremwerte

---

1. Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit, und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an:
   a) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ $\quad (b \neq 0)$, b) $f(x) = |x|$, **HA:** c) $f(x) = \sin x$,
   d) $f(x) = 2^{|x|}$.

2. Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen (an den Stellen, wo die Funktionen differenzierbar sind). Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
   HA: a) $y = x^3(x^2-1)^2$, **HA:** b) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$, c) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,
   HA: d) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, **HA:** e) $y = 2^{\sin 3x}$, f) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$,
   HA: g) $y = \ln \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, **HA:** h) $y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$,
   i) $y = a^{(a^x)}$, j) $y = \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,
   k) $y = x^x$, **HA:** l) $y = x^{\sin x}$.

3. **HA:** Überprüfen Sie mit der Regel von l'Hospital die Resultate aus 12. Übung, Aufgaben 1a,b,c,e,j, 3c,g und 4a,b,d.

4. Berechnen Sie mit der Regel von l'Hospital
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0)$,
   (d) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$, (e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$.

5. Wie erklärt man folgendes Phänomen:
   Der Grenzwert
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$
   ist von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$" und offenbar gleich 1. Nach der Regel von l'Hospital erhält man als Quotienten der Ableitungen aber $1 + \cos x$, was für $x \to \infty$ keinen Grenzwert besitzt.

6. Berechnen Sie die n-te Ableitung:
   a) $y = e^{-ax}$, **HA:** b) $y = a^x$, c) $y = \ln x^2$, **HA:** d) $y = \ln(ax+b)$.

7. Man prüfe, ob die Funktion $y = y(x)$ gegeben durch
   HA: a) $y = ax + be^x + \left(\frac{1}{2} - x\right) e^{-x} \quad (a, b \in \mathbb{R})$,
   b) $y = a(1+x^2) + b(x + (1+x^2) \arctan x)$
   der Differentialgleichung $(1+x^2)y'' - 2y = 0$ genügt.

8. Bestimmen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen von folgenden Funktioinen f:

a)	$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \sin x$,
HA: b)	$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \cos x$,
c)	$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \tan x$,
HA: d)	$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \cot x$.

9. Bestimmen Sie, in welchen Intervallen $f(x)$ monoton ist und wo die Extremwerte von $f(x)$ liegen: a) $f(x) = 2x^2 - x^4$, **HA:** b) $f(x) = xe^{-x}$.

10. **HA:** Zeigen Sie die Ungleichung $\quad \dfrac{2}{3} \leq \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2.$

11. Welches Rechteck mit den Seiten parallel zu den Achsen der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, das in die Ellipse einbeschrieben ist, besitzt den grössten Flächeninhalt?

12. **HA:** Die durch eine punktförmige Lichtquelle verursachte Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat des Abstandes zwischen Ausgangs- und Beobachtungspunkt (des Lichtstromes) ab. Wo befindet sich der dunkelste Punkt zwischen zwei 10 m voneinander entfernten punktförmigen Lichtquellen, falls eine viermal so stark wie die andere ist?

13. Das "Jüngste Gericht" – eines der Hauptwerke von Michelangelo (1475 – 1564) – schmückt die Altarwand der Sixtinischen Kapelle in Rom. Das Fresko ist annähernd rechteckig, etwa 10 m breit und 12 m hoch. Zwei Meter tiefer als der untere Rand des Gemäldes möge sich das Auge eines Kunstliebhabers befinden. Welchen Ort in der Kapelle sollte er als einen günstigen Standpunkt zur Betrachtung des Kunstwerkes wählen?

14. a) Bestimmen Sie Maximum und Minimum von $f(x) = 3x - x^3$ für $x \in [-2, 3]$.

    b) Gilt bei $|x| < 2$ die Ungleichung $|3x - x^3| \leq 2$?

15. Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-1} & : \ |x| \neq 1 \\ 1 & : \ |x| = 1 \end{cases}$$

a)	die Unstetigkeitsstellen,
HA: b)	die Nullstellen und die Extrema,
c)	die Asymptoten.

16. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x = \dfrac{2k+1}{4}\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{\cos x}{\cos 2x} & : \ \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

Ist dies eine gerade Funktion? Ist sie periodisch? Geben Sie Extremwerte und Asymptoten an !

17. Beweisen Sie die Ungleichung

    a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$, b) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$.