Mathematik für Informatiker

13. Übung – Stetigkeit und Zwischenwertsatz

---

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (Argumentieren Sie mit der Stetigkeit von entsprechenden Funktionen!)

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, **HA:** b) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan \sqrt[n]{a^2},\ a \in \mathbb{R}$,

   HA: c) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{x^2+1}{x^2+x}}$, **HA:** d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$,

   HA: e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)^2$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{a}{1+\ln x}}\quad (a \in \mathbb{R})$,

   g) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan\frac{1}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$.

2. Die Funktionen f, g seien in einer Umgebung von x_0 definiert, wobei

   (a) f stetig in x_0, g unstetig in x_0,

   (b) f und g unstetig in x_0

   seien sollen! Welche Ausage kann man über die Stetigkeit der Summe bzw. des Produktes der Funktionen von f und g,

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,, \qquad \textbf{HA}: (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)\,,$$

   machen?

3. **HA:** Die Funktion $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

   $$f(x) = \frac{3x-1}{x-1}\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass f über $(1,\infty)$ streng monoton fallend ist!

   (b) Wie verhält sich die Funktion f für $x \to \infty$?

   (c) Bestimmen Sie das Bild im $f = f(D), D = (1,\infty)$.

   (d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

   $$f^{-1} : f(D) \to (1,\infty)\,.$$

   (e) Sei $x_0 = 2$. Bestimmen Sie für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ so, dass gilt

   $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta\,. \qquad (*)$$

   (f) Geben Sie für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ an, so dass $(*)$ erfüllt ist.

4. Es sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $F([a,b]) \subset [a,b]$. Zeigen Sie, dass F mindestens einen Fixpunkt in $[a,b]$ hat, d.h. es gibt ein $x_F \in [a,b]$ mit $F(x_F) = x_F$.

5. Besitzt die Gleichung $2^x = 4x$ außer bei $x_0 = 4$ noch weitere Lösungen?

6. Sei $\alpha < \beta$. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0$ mindestens eine Lösung $x_0 \in (\alpha,\beta)$ hat.

7. **HA:** Beweisen Sie, dass man jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in die Summe aus einer geraden und ungeraden Funktion zerlegen kann!

8. Jede stetige Abbildung $f : K \to \mathbb{R}$ eines Kreises $K \subset \mathbb{R}^2$ führt ein gewisses Paar diametral gelegener Punkte in den gleichen Punkt über.

9. Gegeben sei ein beliebiges, beschränktes, ebenes Gebiet G mit Flächeninhalt F.

   (a) Zeigen Sie, dass eine Gerade existiert, die G in zwei flächengleiche Teile zerlegt.

   (Z) Zeigen Sie, dass es zwei senkrecht aufeinanderstehende Geraden gibt, die G in vier flächengleiche Teile zerlegt.

10. Beweisen Sie: Wenn f differenzierbar auf dem Intervall I ist und $f'(x)$ auf I beschränkt ist, dann ist f gleichmäßig stetig über I.

Zusatz: Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen, die der Funktionalgleichung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

genügen.