Mathematik für Informatiker

12. Übung – Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

---

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4(x-1)x^2+2x}{x^2(2x+3)+1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$, **HA:** (d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{2}{x+1}+3}{5+\frac{1}{x^2-1}}$,

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, **HA:** (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$,

   (g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$, **HA:** (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)$,

   (i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$, **HA:** (j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$,

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\big|\,|x|-x\big|}{x}$, **HA:** (l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

   In welchen Fällen liegt bestimmte Divergenz vor?

2. **HA:** Bestimmen Sie die folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x+1}{x-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^4-1}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x-\sqrt{4x^2-x}$.

3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte der Gestalt „1^∞“

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ $(a\in\mathbb{R})$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$,

   HA: (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$, **HA:** (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$,

   HA: (g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(a\in\mathbb{R})$, **HA:** (h) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,

   (i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$, **HA:** (j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(a+\frac{a}{x}\right)^x$ $(a>0)$.

4. Verwenden Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ zur Berechnung von

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m,n \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$,

(c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m,n \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$, **HA:** (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x\cos x}{5x}$.

5. Sei $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

definiert. Berechnen Sie die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$f_1 = f\,,$$
$$f_n = f \circ f_{n-1} \quad \text{für} \quad n = 2, 3, \ldots .$$

6. Beweisen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen in $x = a$, jeweils nach der $\varepsilon-\delta$-Definition:

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \sqrt{x}\,,$ $\quad a \in (0,1)\,,$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,,$ $\quad a \in \mathbb{R}\,,$

(c) $f : [0,2] \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : x \geqq 1 \\ \frac{1-x}{1-x^2} & : x \in [0,1) \end{cases}\,,$ $\quad a = 1\,,$

HA: (d) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = 4x^2\,,$ $\quad a \in [-1,1]\,.$

7. Bestimmen Sie die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to a-0} f(x)\,, \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

für:

(a) $f(x) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right)^{\tan 2x}$ $\quad a = \frac{\pi}{4}$,

HA: (b) $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x}$, $\quad a = 0$,

(c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, $\quad a = 0\,,\ a = 1$,

HA: (d) $f(x) = |x| - x$, $\quad a = 0$,

HA: (e) $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$, $\quad a = 1\,,\ a = 0$.

8. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit in $[-1,1]$

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x\,,$ (b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & : x \geq 0 \\ \frac{1}{2^x} & : x < 0 \end{cases}\,,$

HA: (c) $f(x) = \cos x^2 - (\sin x)^3 + \sqrt{|x|}\,,$ (d) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}\,,$

HA: (e) $f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}\,,$ (f) $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}\,.$