

## Übungen zum Kurs Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 4. Übung – Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung, Eulersche Differentialgleichungen, Rand- und Eigenwertprobleme

---

1. Lösen Sie folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

- (a)  $y'' - y' - 6y = 0$ ,
- (b)  $y'' + 5y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,
- (c)  $y'' - a^2y = 0$  ( $a \in \mathbb{R}$ ),
- (d)  $y'' - 4y' + 13y = 0$ ,
- (e)  $y'' + a^2y = 0$  ( $a \in \mathbb{R}$ ),
- (f)  $y'' + 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,
- (HA)** (g)  $y^{(4)} - 2y'' = 0$ ,
- (HA)** (h)  $y''' + y'' + y' + y = 0$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 2$ ,
- (i)  $y^{(4)} + y = 0$ .

2. Lösen Sie folgende lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit der Ansatzmethode

- (HA)** (a)  $y^{(4)} + y = x$ ,
- (b)  $y'' + 2y' + y = x$ ,
- (HA)** (c)  $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$ ,
- (d)  $y''' - y = 6e^{-x}$ ,
- (e)  $y'' + 4y = x^2 + \cos x$ ,
- (f)  $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$ ,
- (g)  $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ ,
- (HA)** (h)  $y'' - y = e^x$ ,
- (HA)** (i)  $y^{(4)} - 2y'' = x^2 + x - 1$ .

3. Lösen Sie mit einem komplexen Ansatz

- (a)  $y'' + y = e^{2x} \cos 3x$ ,
- (HA)** (b)  $y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$ .

4. Lösen Sie mit Variation der Konstanten

- (a)  $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$ ,
- (HA)** (b)  $y'' + 4y = \cos x$ ,
- (c)  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$ .

5. **(HA)** Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 4u(t) = 25 \sin t,$$

die den Anfangsbedingungen  $u(0) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = 1$  genügt!

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis !

6. Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation folgende Anfangswertprobleme

- (a)  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,
- (b)  $y'' + 4y' = \cos 2t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,
- (HA)** (c)  $y'' - 9y = e^t$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,
- (HA)** (d)  $y'' + 2y' + y = te^{-t}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

7. Lösen Sie folgende Eulersche Differentialgleichungen

(a)  $x^2y'' + xy' + 2y = 0$ ,

(b)  $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x$ .

8. Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom reellen Parameter  $\lambda \neq 0$  alle Lösungen des Randwertproblems

$$y'' + \lambda^2 y = 0,$$

die die Bedingungen

(a)  $y(0) = 0, y(\pi) = 1$ ,

(b)  $y(0) = y(\pi) = 1$ ,

erfüllen.

9. Für welche reellen Zahlen  $\lambda$  hat das Randwertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0, y(0) = y(1) = 0$$

nichttriviale Lösungen?

**Zusatz:** Lösen Sie folgende Differentialgleichungen

(a)  $x^2y'' + xy' - y = x^3$ ,

(b)  $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$ .

---

#### 4. Hausaufgabe

Lösen Sie folgende Aufgaben der 4. Übung

1 (g), 1 (h), 2 (a), 2 (c), 2 (h), 2 (i), 3 (b), 4 (b), 5, 6 (c) und 6 (d).