Übungen zum Kurs
Gewöhnliche Differentialgleichungen

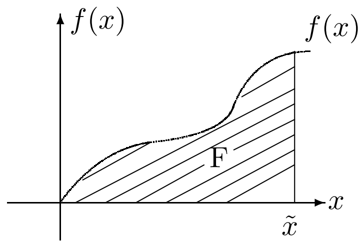
1. Übung – Gleichungen mit trennbaren Veränderlichen

---

1. In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100^oC erhitzt wurde, in einem Raum mit der Temperatur von 20^oC bis auf 25^oC ab, wenn er sich in 10 min bis auf 60^oC abkühlt? (Hinweis: Die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional der Temperaturdifferenzen.)

2. Bestimme die Bewegungsgleichung eines Massepunktes, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_o von der Erdoberfläche senkrecht nach oben geschossen wird! Nach welcher Zeit erreicht er seine höchste Lage? Wie hoch befindet er sich in diesem Moment?

3. Finde die stetige Funktion $f(x)$ mit $f(x) \geq 0, f(0) = 0, f(1) = 1$ so, daß die abgebildete Fläche F gerade proportional zur $(n+1)$ten Potenz $(n \geq 1)$ von $f(\tilde{x})$ ist.



4. Man bestimme diejenige Kurve, die durch den Punkt $(-a, a)$ geht, wenn der durch die Schnittpunkte A und B mit den Koordinatenachsen begrenzte Abschnitt einer beliebigen Kurventangente vom jeweiligen Berührungspunkt M halbiert wird.

5. Am Boden eines zylindrischen Gefäßes, welches bis zur Höhe H_o mit Wasser gefüllt ist, befindet sich eine kleine Öffnung der Fläche q, die vom Zeitpunkt $t = 0$ an proportional zur Zeit geöffnet wird. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Zylinder zum Zeitpunkt $t = T$, wenn hier die Öffnung erstmalig vollständig offen ist? (Hinweis: Die Ausflußgeschwindigkeit von H_2O aus einer kleinen Öffnung, die sich in der Tiefe h unterhalb der freien Wasseroberfläche befindet ist gerade $\sqrt{2gh}$ mit g-Erdbeschleunigung.)

6. Bestimme das Zerfallsgesetz von Radium, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse m_o vorhanden ist. (Die Halbwertzeit von Radium beträgt 1600 Jahre.)

7. Bestimmen Sie zu folgenden Kurvenscharen eine zugehörige Differentialgleichung, so dass diese Kurvenscharen (bis auf endlich viele) alle Lösungen dieser Differentialgleichung sind (c, p reelle Parameter):

   (a) $x^2 + y^2 = c$,
   (b) $y^2 = 2px$,
   (c) $(x-c)^2 + y^2 = 1$,
   (d) **(2. HA)** $ye^{-\frac{x^2}{2}} = c$.

1. Hausaufgabe

---

1. Skizzieren Sie Graphen von Lösungen folgender Differentialgleichungen

   (a) $y' = x$, (b) $y' = y$, (c) $y' = \frac{y}{x}$.

2. Bestimmen Sie alle Lösungen $y = y(x)$ folgender Differentialgleichungen

   (a) $y' = -\frac{x}{y}$, (b) $y' = \frac{y}{x^2-1}$, (c) $2xy^2 + (x^2-1)y' = 0$.

   Welche Lösung von (a), (b) und (c) erfüllt die Bedingung $y(0) = 1$? Skizzieren Sie für diese Lösungen den Graphen in der xy-Ebene!

3. Alamagunther Tropfloch holt eine Flasche Bier aus seinem 7^o C–Kühlschrank, in dem sie schon seit zwei Tagen steht. Er hat sie noch nicht geöffnet, da stürzt sein derangierter Bruder Almansor ins Haus und verstrickt ihn ganze 90 Minuten lang in eine hitzige Diskussion über die Zukunft des Ackerbaus am Nordpol. All das spielt sich in dem Wohnzimmer ab, das der energiebewußte Almagunther auf der patriotischen Temperatur von 19^o C hält. Dem Hausherrn schwant, dass sein vereinsamtes Bier für Christenmenschen zu warm werden wird. Kaum hat Almansor die Haustür zugeschlagen, mißt Almagunther die Temperatur des Gerstensaftes und stellt eine betrübliche Überhitzung desselben auf 15^o C fest. Da er, wie jeder passionierte Biertrinker, das Newtonsche Abkühlungsgesetz kennt, schließt er daraus, dass er Bier mit Zimmertemperatur (19^o C) etwa 3 Stunden lang in seinen Kühlschrank stellen muß, um es auf annehmbare 8^o C zu bringen. Hat er recht?

4. (a) Bestimmen Sie alle Kurven, für die die Fläche des Dreiecks, welches von der Tangente, der in den Berührungspunkt parallel verschobenen Ordinatenachse und der Abszissenachse gebildet wird, gleich einer vorgegebenen Konstanten a^2 ist.

   (Z) Man bestimme alle Kurven, für die die Summe der Katheten des unter a) beschriebenen Dreiecks gleich einer vorgegebenen Konstanten b ist.