

Analysis II

11. Übung – Potenzreihen, Taylor-Entwicklung

1. Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und geben Sie den Konvergenzkreis an:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{\mathbf{i}z}{n}\right)^n$ (b) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + \mathbf{i}n)^n z^n}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n$, wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler der Zahl n bezeichnet,

(d) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^2}$ ($a \neq 0, a \in \mathbb{C}$) (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^{\sqrt{n}}}$ ($a > 0$)

(f) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}$ ($a, b > 0$)

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\vartheta(n)}(1-z)^n}{n}$, wobei $\vartheta(n)$ die Anzahl der Dezimalziffern der Zahl n bezeichnet,

(h) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) z^n$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{i})^n z^{2n}}{n!}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$

(k) **(HA)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + 2 \cos \frac{\pi n}{4})^n}{\ln n} z^n$ (l) **(HA)** $\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n (z - \mathbf{i})^n$

2. Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mögen den Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 haben. Geben Sie Abschätzungen für den Konvergenzradius R der folgenden Reihen an:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ (b) **(HA)** $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$

3. Geben Sie für folgende Funktionen die Potenzreihenentwicklung im Punkt z_0 und den Konvergenzbereich an. Verwenden Sie dazu bekannte Taylorreihen!

(a) $f(z) = e^{-z^2}$, $z_0 = 0$ (b) $f(z) = a^z := e^{z \ln a}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \pi$ ($a > 0$)

(c) $f(z) = \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $z_0 = 0$, **(HA)** $z_0 = \pi$ (d) $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 2$

(e) $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$, $z_0 = 0$, **(HA)** $z_0 = 1$ (f) **(HA)** $f(z) = \sin z$, $z_0 = \pi$

4. Man berechne die Summe folgender Potenzreihen mittels bekannter Taylorreihen:

$$(a) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Berechnung richtig?

5. Man gebe für folgende Funktionen die Taylorentwicklung bis $(x - x_0)^n$ und das Restglied $R_n(f; x_0, x)$ nach Lagrange an:

$$(a) f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}, x_0 = 0, n = 3 \quad (b) f(x) = x^x - 1, x_0 = 1, n = 3$$

$$(Z) f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, x_0 = 0, n = 3 \quad (\text{Literatur: Fichtenholz, Band II, Nr. 449})$$

6. Man schätze den Fehler ab, der bei folgenden Näherungen entsteht:

$$(a) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, 0 \leq x \leq 1 \quad (b) \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

11. Hausaufgabe

1. Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \ln \cos x$ im Punkt $x_0 = 0$ bis $n = 3$ und das Restglied $R_3(f; 0, x)$ in der Lagrange'schen Form an.

2. Berechnen Sie näherungsweise

$$(a) \sqrt[3]{30}, \quad (b) \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

mit Hilfe eines Taylorpolynoms 2ten Grades, und schätzen Sie den Fehler ab. (Wählen Sie einen günstigen Entwicklungspunkt x_0 !)

3. Man schätze den Fehler ab, der bei der Näherung $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ entsteht.

4. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 11. Übung.

Zusatz: Ermitteln Sie die n -te Ableitung von $f_n(x) = x^{n-1}e^{x^{-1}}$.