Analysis I

7. Übung – Reihen

---

1. Es seien $a_n > 0$, $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende **Vergleichskriterien**:

   Es existiere der Grenzwert $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

   - Ist $q < \infty$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
   - Ist $q > 0$, so folgt aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
   - Im Fall $q \in (0,\infty)$ konvergieren bzw. divergieren beide Reihen gleichzeitig.

2. **(HA)** Es seien $a_n > 0$, $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall\, n > n_0$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n}{n!}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{2^n}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\arctan n)^n}{2^n}$

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$ (g) $1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2n}}+\dfrac{3}{2^{2n+1}}+\cdots$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\dfrac{2}{n} \tan\dfrac{5}{n}$

   (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{2n^3-1}$ (j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1+(-1)^n n^2}{2+n^2}$ (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^3}$ (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ (m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$

   (n) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$ (o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (p) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{10}}{10^n}$ (q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

   (r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}\cos^2\dfrac{1}{n}$ (s) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left[\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\pi\right]$

   (u) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{1}{3^n}$ (v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1)-\ln n)$ (w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(a+bn)^s}$ $(s \in \mathbb{R},\ a,b \ge 0)$

   (x) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} \tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (y) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ (z) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$

   (ä) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$ (ö) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^\rho}$ $(\rho > 0)$ (ü) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

4. Untersuchen Sie mit Hilfe von Vergleichskriterien auf Konvergenz:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{n}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\alpha}{n}\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$

5. Untersuchen Sie mit Hilfe des Wurzel- bzw. Quotientenkriteriums auf Konvergenz $(z \in \mathbb{C})$:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$ (d) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan n}{2}\, z\right)^n$

6. Beweisen Sie: Ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ für alle $p > 1$. Gilt die Umkehrung?

7. Beweisen Sie: Sind die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergent, so konvergieren auch die Reihen

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

8. Es gelte $a_n \longrightarrow a$ und $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}|$ konvergiert.

9. Wir modifizieren die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ auf folgende Weise:

   (a) **(HA)**Wir summieren nur über die durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n.
   (b) Wir summieren nur über die natürlichen Zahlen n, bei denen in der Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt.

   Untersuchen Sie die so modifizierten Reihen auf Konvergenz.

10. Geben Sie die Summe $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ folgender Reihen an:

    (a) $a_n = \frac{1}{(d+n)(d+n+1)}$ $(-d \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N})$ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) **(HA)** $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$

11. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen absolut konvergiert.

12. Es sei $\gamma_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie die Summe der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{10^n}$ an.

Zusatz 1:
Untersuchen Sie mit Hilfe des Dirichlet- oder Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz $(\alpha \in \mathbb{R})$:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\alpha)$ $((b_n)_{n=1}^{\infty}$ monotone Nullfolge) (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin(n\alpha)}{n}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$

(Erarbeiten Sie sich das Dirichlet-Kriterium mit Hilfe der Literatur – z.B. Fichtenholz, Band II, Nr. 384.)

Zusatz 2:
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ eine Reihe mit $b_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $b_n \longrightarrow 0$. Konvergiert diese Reihe?

Zusatz 3:
Es sei s die Summe der Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Geben Sie jeweils eine Umordnung dieser Reihe an, die die Summe $\frac{3s}{2}$, 0 bzw. ∞ hat.

Zusatz 4:
Geben Sie die Summe folgender Reihe an:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\ldots\,.$$

Die Summanden sind die Reziproken der nur durch 2 oder 3 teilbaren, natürlichen Zahlen!

---

7. Hausaufgabe

1. Schreiben Sie die folgenden Reihen in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und untersuchen Sie, ob die Reihen konvergieren oder sogar absolut konvergieren:
   (a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots$ (b) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$ (c) $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$
   (d) $1+\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\ldots$ (e) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots$ (f) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^2}\pm\ldots$
2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6n}\right)^n$ (b) $\left(\sum_{k=1}^{2007}\frac{k!}{5^k}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
3. Für welche $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$ konvergent?
4. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n < e^2$ gilt.
5. Für $n > 1$ gilt offenbar $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$. Man leite daraus eine obere und untere Schranke für die Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ab.

6. Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a unterliegt die sogenannte Kochsche Schneeflocke der folgenden Bildungsvorschrift. Die Berandung T_n nach dem n-ten Entwicklungsschritt entsteht aus T_{n-1} indem auf dem mittleren Drittel einer jeden geradlinigen Berandungsstrecke von T_{n-1} ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Man berechne den Umfang U_n und Flächeninhalt F_n der Figur T_n sowie $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$. (Hinweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a beträgt $F_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.)

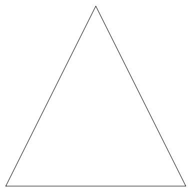

Abbildung 1: Schneeflocke T_0.

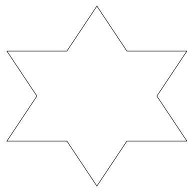

Abbildung 2: Schneeflocke T_1.

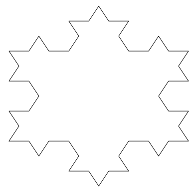

Abbildung 3: Schneeflocke T_2.

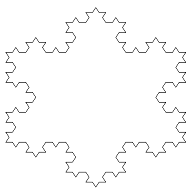

Abbildung 4: Schneeflocke T_3.

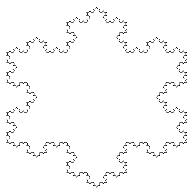

Abbildung 5: Schneeflocke T_4.

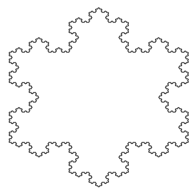

Abbildung 6: Schneeflocke T_5.

7. Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

   (a) Wie hoch wird der Turm?

   (b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

   (c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

8. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 8. Übung.

Literatur: G. M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Band II.