

Analysis I

7. Übung – Reihen

1. Es seien $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende **Vergleichskriterien**:

Es existiere der Grenzwert $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

- Ist $q < \infty$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Ist $q > 0$, so folgt aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Im Fall $q \in (0, \infty)$ konvergieren bzw. divergieren beide Reihen gleichzeitig.

2. **(HA)** Es seien die Voraussetzungen von Aufgabe 1 erfüllt. Zeigen Sie: Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \forall n > n_0$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{\frac{1}{n}}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (g) $1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{3}{2^{2n+1}} + \dots$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{2}{n} \tan \frac{5}{n}$
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$ (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n^2}{2+n^2}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)25^n}{(2n)!}$
- (n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (p) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$ (q) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{3} - 1)$
- (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cos^2 \frac{1}{n}$ (s) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{n} \right) \pi \right]$
- (u) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ (v) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$ (w) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$ ($s \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$)
- (x) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \tan \frac{1}{\sqrt{n}}$ (y) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ (z) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$
- (ä) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) (ö) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\rho}$ ($\rho > 0$) (ü) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

4. Untersuchen Sie mit Hilfe von Vergleichskriterien auf Konvergenz:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{n} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$$

5. Untersuchen Sie mit Hilfe des Wurzel- bzw. Quotientenkriteriums auf Konvergenz ($z \in \mathbb{C}$):

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n \quad (d) \text{(HA)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan n}{2} z\right)^n$$

6. Beweisen Sie: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ für alle $p > 1$. Gilt die Umkehrung?

7. Beweisen Sie: Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergent, so konvergieren auch die Reihen

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

8. Es gelte $a_n \rightarrow a$ und $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}|$ konvergiert.

9. Wir modifizieren die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ auf folgende Weise:

(a) **(HA)** Wir summieren nur über die durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n .

(b) Wir summieren nur über die natürlichen Zahlen n , bei denen in der Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt.

Untersuchen Sie die so modifizierten Reihen auf Konvergenz.

10. Geben Sie die Summe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgender Reihen an:

$$(a) a_n = \frac{1}{(d+n)(d+n+1)} \quad (-d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \quad (b) a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (c) \text{(HA)} a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$$

11. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen absolut konvergiert.

12. Es sei $\gamma_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \forall n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie die Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{10^n}$ an.

Zusatz 1:

Untersuchen Sie mit Hilfe des Dirichlet- oder Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\alpha) \quad ((b_n)_{n=1}^{\infty} \text{ monotone Nullfolge}) \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin(n\alpha)}{n} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1) \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$$

(Erarbeiten Sie sich das Dirichlet-Kriterium mit Hilfe der Literatur – z.B. Fichtenholz, Band II, Nr. 384.)

Zusatz 2:

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ eine Reihe mit $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $b_n \rightarrow 0$. Konvergiert diese Reihe?

Zusatz 3:

Es sei s die Summe der Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Geben Sie jeweils eine Umordnung dieser Reihe an, die die Summe $\frac{3s}{2}$, 0 bzw. ∞ hat.

Zusatz 4:

Beweisen Sie den Verdichtungssatz von Cauchy! (Fichtenholz, Band II, Nr. 375, 2.)

7. Hausaufgabe

1. Schreiben Sie die folgenden Reihen in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und untersuchen Sie, ob die Reihen konvergieren oder sogar absolut konvergieren:

(a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots$ (b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$ (c) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$
 (d) $1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \dots$ (e) $1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$ (f) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^2} \pm \dots$

2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6n} \right)^n$ (b) $\left(\sum_{k=1}^{2007} \frac{k!}{5^k} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

3. Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$ konvergent?

4. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n < e^2$ gilt.

5. Für $n > 1$ gilt offenbar $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$. Man leite daraus eine obere und untere Schranke für die Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ab.

6. Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a unterliegt die sogenannte Kochsche Schneeflocke der folgenden Bildungsvorschrift. Die Berandung T_n nach dem n -ten Entwicklungsschritt entsteht aus T_{n-1} indem auf dem mittleren Drittel einer jeden geradlinigen Berandungsstrecke von T_{n-1} ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird ($n = 1, 2, 3, \dots$). Man berechne den Umfang U_n und Flächeninhalt F_n der

Figur T_n sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$. (Hinweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a beträgt $F_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.)

Abbildung 1: Schneeflocke T_0 . Abbildung 2: Schneeflocke T_1 . Abbildung 3: Schneeflocke T_2 .

Abbildung 4: Schneeflocke T_3 . Abbildung 5: Schneeflocke T_4 . Abbildung 6: Schneeflocke T_5 .

7. Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Die Bodenfläche des $(n + 1)$ -ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n -ten Würfels gesetzt.

- (a) Wie hoch wird der Turm?
- (b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?
- (c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

8. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 7. Übung.

Literatur: G. M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Band II.