

Analysis I

6. Übung – Supremum, Infimum, Zahlenfolgen

1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass eine obere Schranke s von A genau dann Supremum von A ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a_\varepsilon \in A$ existiert mit $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.
2. Sind folgende Mengen beschränkt? Ermitteln Sie gegebenenfalls Supremum und Infimum! In welchen Fällen existiert ein Maximum bzw. Minimum?

(a) $(0, 1)$, (b) $(-\infty, 0]$, (c) **(HA)** $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ (d) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
(e) **(HA)** $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ (f) $\{n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N}\}$ **(Z)** $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

3. Es seien die nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und $-A := \{-a : a \in A\}$. Man zeige, dass dann $\sup(-A) = -\inf A$ gilt.
4. Die Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ seien nach oben beschränkt. (**(HA)** nach unten beschränkt.) Wir definieren $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie, dass dann $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ (**(HA)** $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$) gilt.
5. Für folgende Zahlenfolgen sind Zahlen a und $N(\varepsilon)$ zu finden, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$ $\forall n > N(\varepsilon)$ und $\forall \varepsilon > 0$ gilt.

(a) $x_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$ (b) **(HA)** $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $x_n = \frac{1 + \sqrt{n}}{n^3}$

(d) **(HA)** $x_n = \frac{\sin n}{2 + \sqrt[3]{n^5}}$ (e) $x_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$

(f) $x_n = \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ (g) $z_n = \frac{1}{n} + 25\mathbf{i}$

(h) $z_n = \left(\frac{\mathbf{i}}{n}\right)^n$ (i) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{a}$ ($a > 1$)

(j) **(HA)** $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4$ (k) **(HA)** $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \mathbf{i})\right)^n$

6. Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^\infty$:

(a) $x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 4}$ (b) $x_n = a^{\frac{1}{n}}$ ($a > 0$) (c) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2}}$

(d) $x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ (e) $x_n = (n+1)^k - n^k$ ($0 < k < 1$)

(f) $x_n = \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{i=0}^j b_i n^i}$ ($k, j \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0, b_j \neq 0$) (g) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(h) **(HA)** $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ (i) $x_n = \sqrt[n]{4^n + 3^n + 2^n}$

(j) $x_n = (1 + n)^{\frac{1}{n}}$ (k) **(HA)** $x_n = \left(\sum_{i=1}^m a_i^n\right)^{\frac{1}{n}}$ ($a_i > 0$)

$$\begin{aligned}
(1) \quad x_n &= \frac{\log_a n}{n} \quad (a > 1) & (m) \quad \textbf{(HA)} \quad x_n &= \frac{3n^2 + \sqrt{n^3 + 2}}{n^2 - n + 1} & (n) \quad x_n &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \\
(o) \quad \textbf{(HA)} \quad x_n &= \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} & (p) \quad \textbf{(HA)} \quad x_n &= \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n} \\
(q) \quad \textbf{(HA)} \quad x_n &= \sqrt{n + 2} - \sqrt{n} & (r) \quad x_n &= \frac{n!}{n^n} \\
(s) \quad x_n &= n - \sqrt[3]{n^3 - 1} & (t) \quad x_n &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\
(u) \quad \textbf{(HA)} \quad x_n &= \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} & (v) \quad x_n &= \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \quad (a \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

7. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren die Grenzwerte

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} n z^n, \quad (b) \textbf{(HA)} \lim_{n \rightarrow \infty} n! z^n, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n} ?$$

8. Verwenden Sie die binomische Formel, um zu zeigen, dass

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt, und berechnen Sie damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

9. Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

$$\begin{aligned}
(a) \quad x_n &= \frac{c^n}{n!} \quad (c > 0) \\
(b) \quad x_n &= \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \dots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ Wurzeln}} \quad (c > 0) \\
(c) \quad x_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}_0, a > 0, x_0 > 0) \\
(d) \quad \textbf{(HA)} \quad x_{n+1} &= x_n(2 - x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0, 0 < x_0 < 1)
\end{aligned}$$

10. Beweisen Sie:

- (a) Aus $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow a$ und $a > p$ folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n > p$ $\forall n \geq n_0$.
- (b) Aus $x_n \in \mathbb{R}$, $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $b < q$ folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < q$ $\forall n \geq n_0$.

11. **(HA)** Formulieren Sie eine zu 10(b) analoge Aussage für den Limes Inferior.

12. Man bestimme $\underline{\lim} x_n$ und $\overline{\lim} x_n$:

$$\begin{aligned}
(a) \quad x_n &= (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right) & (b) \quad x_n &= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2} & (c) \quad x_n &= n^{(-1)^n} \\
(d) \quad x_n &= 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} & (e) \quad \textbf{(HA)} \quad x_n &= \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3} \\
(f) \quad \textbf{(HA)} \quad x_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k & (g) \quad \textbf{(HA)} \quad x_n &= (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{2n} + \cos(n\pi)
\end{aligned}$$

13. Es seien $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ reelle und beschränkte Zahlenfolgen. Man zeige, dass dann gilt:

$$(a) \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n,$$

- (b) **(HA)** $\underline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n \leq \overline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$,
(c) $\underline{\lim} x_n \cdot \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim} (x_n y_n) \leq \underline{\lim} x_n \cdot \overline{\lim} y_n$, falls $x_n \geq 0, y_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$,
(d) **(HA)** $\underline{\lim} x_n \cdot \overline{\lim} y_n \leq \overline{\lim} (x_n y_n) \leq \overline{\lim} x_n \cdot \overline{\lim} y_n$, falls $x_n \geq 0, y_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

14. Zeigen Sie: Gilt $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\lim} x_n \cdot \overline{\lim} \frac{1}{x_n} = 1$, so ist $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergent.

15. Untersuchen Sie, ob folgende Zahlenfolgen Cauchy-Folgen sind:

$$(a) x_n = \frac{1}{n}, \quad (b) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad (c) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

6. Hausaufgabe

- Formulieren und beweisen Sie eine zur Aufgabe 1 der 6. Übung analoge Aussage für das Infimum!
- Ermitteln Sie die Grenzwerte nachstehender Folgen, und diskutieren Sie die unterschiedlichen Annäherungen an diese Grenzwerte (Skizze):

$$(a) x_n = \frac{1}{n} \quad (b) x_n = -\frac{1}{n} \quad (c) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(d) x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n} \quad (e) x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n} \quad (f) z_n = \frac{1 + \mathbf{i}}{n}$$

$$(g) z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \mathbf{i}) \right)^n$$

- Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ genau dann gilt, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ ist.
- Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz der Zahlenfolgen x_n und y_n die Konvergenz der Zahlenfolge $z_n := \max\{x_n, y_n\}$ folgt.
- Es seien $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \frac{7a_n + 2}{6a_n + 3}$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Zeigen Sie, dass $a_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.
 - Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=1}^\infty$ monoton fallend ist.
 - Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
- Ein rechtwinkliges Dreieck ABC habe die Katheten a und b und die Hypotenuse c . Von C wird das Lot auf die Hypotenuse gefällt. Vom Fußpunkt des Lotes wird das Lot auf die Kathete b , von dessen Fußpunkt das Lot auf c , dann wieder auf b usw. gefällt. Das Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt. Zeigen Sie, dass die Summe der Längen $h_i (i = 1, 2, \dots)$ aller Lote gleich $\frac{ab}{c-b}$ ist. (Hinweis: Drücken Sie h_i mit Hilfe eines Winkel im Dreieck aus!)
- Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 6. Übung.

Zusatz: Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

$$(a) x_n = n \left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{a}{n}\right)\left(1 - \frac{b}{n}\right)} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \text{ hinreichend groß},$$

$$(b) x_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad a > 1, \beta \geq 1, \quad (c) x_n = \prod_{j=2}^n \left(1 - \frac{1}{j} \right), \quad (d) x_n = \prod_{j=2}^n \left(1 - \frac{1}{j^2} \right).$$