Analysis I

6. Übung – Supremum, Infimum, Zahlenfolgen

---

1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass eine obere Schranke s von A genau dann Supremum von A ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a_\varepsilon \in A$ existiert mit $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.

2. Sind folgende Mengen beschränkt? Ermitteln Sie gegebenenfalls Supremum und Infimum! In welchen Fällen existiert ein Maximum bzw. Minimum?

   (a) $(0,1)$, (b) $(-\infty, 0]$, (c) **(HA)** $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ (d) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

   (e) **(HA)** $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ (f) $\{n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N}\}$ **(Z)** $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

3. Es seien die nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und $-A := \{-a : a \in A\}$. Man zeige, dass dann $\sup(-A) = -\inf A$ gilt.

4. Die Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ seien nach oben beschränkt. (**(HA)** nach unten beschränkt.) Wir definieren $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie, dass dann $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ (**(HA)** $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$) gilt.

5. Zeigen Sie, dass die Zahlenfolge $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend gegen e konvergiert! (Hinweis: Fichtenholz, Band I, Nr. 36.)

6. Für folgende Zahlenfolgen sind Zahlen a und $N(\varepsilon)$ zu finden, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$ $\forall\, n > N(\varepsilon)$ und $\forall\, \varepsilon > 0$ gilt.

   (a) $x_n = \dfrac{n}{n^3 + n^2 + 1}$ (b) **(HA)** $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $x_n = \dfrac{1 + \sqrt{n}}{n^3}$

   (d) **(HA)** $x_n = \dfrac{\sin n}{2 + \sqrt[3]{n^5}}$ (e) $x_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$

   (f) $x_n = \dfrac{1}{n^2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ (g) $z_n = \dfrac{1}{n} + 25\mathbf{i}$

   (h) $z_n = \left(\dfrac{\mathbf{i}}{n}\right)^n$ (i) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 1)$

   (j) **(HA)** $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^4$ (k) **(HA)** $z_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 + \mathbf{i})\right)^n$

7. Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^\infty$:

   (a) $x_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 4}$ (b) $x_n = a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 0)$ (c) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 2}}$

   (d) $x_n = \dfrac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ (e) $x_n = (n+1)^k - n^k$ $(0 < k < 1)$

   (f) $x_n = \dfrac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}{\sum_{i=0}^{j} b_i n^i}$ $(k, j \in \mathbb{N},\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_k \neq 0, b_j \neq 0)$ (g) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

   (h) **(HA)** $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$ (i) $x_n = \sqrt[n]{4^n + 3^n + 2^n}$

(j) $x_n = (1+n)^{\frac{1}{n}}$ (k) **(HA)** $x_n = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^n\right)^{\frac{1}{n}}$ $(a_i > 0)$

(l) $x_n = \dfrac{\log_a n}{n}$ $(a > 1)$ (m) **(HA)** $x_n = \dfrac{3n^2 + \sqrt{n^3+2}}{n^2 - n + 1}$ (n) $x_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

(o) **(HA)** $x_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$ (p) **(HA)** $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - n}$

(q) **(HA)** $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ (r) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(s) $x_n = n - \sqrt[3]{n^3 - 1}$ (t) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(u) **(HA)** $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$ (v) $x_n = \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ $(a \in \mathbb{R})$

8. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren die Grenzwerte

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n$, (b) **(HA)** $\lim\limits_{n\to\infty} n!z^n$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n}$?

9. Verwenden Sie die binomische Formel, um zu zeigen, dass

$$\sqrt[n]{n} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

   gilt, und berechnen Sie damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

10. Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

    (a) $x_n = \dfrac{c^n}{n!}$ $(c > 0)$

    (b) $x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$ $(c > 0)$

    (c) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}_0,\ a > 0,\ x_0 > 0)$

    (d) **(HA)** $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0,\ 0 < x_0 < 1)$

11. Beweisen Sie:

    (a) Aus $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \longrightarrow a$ und $a > p$ folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n > p$ $\forall\, n \ge n_0$.

    (b) Aus $x_n \in \mathbb{R}$, $b = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ und $b < q$ folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < q\ \forall\, n \ge n_0$.

12. **(HA)** Formulieren Sie eine zu 11(b) analoge Aussage für den Limes Inferior.

13. Man bestimme $\underline{\lim}\, x_n$ und $\overline{\lim}\, x_n$:

    (a) $x_n = (-1)^n(2 + \dfrac{3}{n})$ (b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ (c) $x_n = n^{(-1)^n}$

    (d) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$ (e) **(HA)** $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

    (f) **(HA)** $x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ (g) **(HA)** $x_n = (-1)^n\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{2n} + \cos(n\pi)$

14. Es seien $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ reelle und beschränkte Zahlenfolgen. Man zeige, dass dann gilt:

    (a) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\, (x_n + y_n) \le \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,

    (b) **(HA)** $\underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \le \overline{\lim}\, (x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,

    (c) $\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\, (x_n y_n) \le \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, falls $x_n \ge 0$, $y_n \ge 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

    (d) **(HA)** $\underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n \le \overline{\lim}\, (x_n y_n) \le \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, falls $x_n \ge 0$, $y_n \ge 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

15. Zeigen Sie: Gilt $x_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, \frac{1}{x_n} = 1$, so ist $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent.

16. Untersuchen Sie, ob folgende Zahlenfolgen Cauchy-Folgen sind:

    (a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, (b) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, (c) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

---

6. Hausaufgabe

1. Formulieren und beweisen Sie eine zur Aufgabe 1 der 6. Übung analoge Aussage für das Infimum!

2. Ermitteln Sie die Grenzwerte nachstehender Folgen, und diskutieren Sie die unterschiedlichen Annäherungen an diese Grenzwerte (Skizze):

    (a) $x_n = \dfrac{1}{n}$ (b) $x_n = -\dfrac{1}{n}$ (c) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

    (d) $x_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n}$ (e) $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$ (f) $z_n = \dfrac{1 + \mathbf{i}}{n}$

    (g) $z_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 + \mathbf{i}) \right)^n$

3. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ genau dann gilt, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ ist.

4. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz der Zahlenfolgen x_n und y_n die Konvergenz der Zahlenfolge $z_n := \max\{x_n, y_n\}$ folgt.

5. Es seien $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \dfrac{7a_n + 2}{6a_n + 3}$, $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Zeigen Sie, dass $a_n > 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt.

    (b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton fallend ist.

    (c) Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

6. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC habe die Katheten a und b und die Hypotenuse c. Von C wird das Lot auf die Hypotenuse gefällt. Vom Fußpunkt des Lotes wird das Lot auf die Kathete b, von dessen Fußpunkt das Lot auf c, dann wieder auf b usw. gefällt. Das Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt. Zeigen Sie, dass die Summe der Längen $h_i (i = 1, 2, \dots)$ aller Lote gleich $\frac{ab}{c-b}$ ist. (Hinweis: Drücken Sie h_i mit Hilfe eines Winkel im Dreieck aus!)

7. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 6. Übung.

Zusatz 1: Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

(a) $x_n = n\left(1 - \sqrt{(1-\frac{a}{n})(1-\frac{b}{n})}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$, n hinreichend groß ,

(b) $x_n = \dfrac{n^\beta}{a^n}$, $a > 1$, $\beta \geq 1$, (c) $x_n = \displaystyle\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j}\right)$, (d) $x_n = \displaystyle\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$.

Zusatz 2: Sei $\{a_n\}$ eine positive, reelle Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \,.$$