

Analysis I

4. Übung – Relationen

1. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ seien folgende Relationen R_1 bis R_6 erklärt:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \quad R_2 = \{(4, 4)\} \cup R_1, \quad (\mathbf{HA}) \quad R_3 = R_2 \cup \{(1, 3)\},$$

$$R_4 = R_3 \cup \{(3, 1)\}, \quad (\mathbf{HA}) \quad R_5 = R_4 \cup \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3)\},$$

$$R_6 = R_2 \cup \{(2, 3), (3, 2), (1, 2), (2, 1)\}.$$

- (a) Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?
- (b) Man ergänze die Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind, durch Hinzufügen möglichst weniger weiterer Elemente aus $M \times M$ zu einer Äquivalenzrelation.
- (c) Man bestimme jeweils alle Äquivalenzklassen.

2. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch

- (a) $X = \mathbb{N}$, $mR_a n : \Leftrightarrow m + n$ gerade,
- (b) **(HA)** $X = \mathbb{N}$, $mR_b n : \Leftrightarrow m + n$ ungerade,
- (c) $X = \mathbb{N}$, $mR_c n : \Leftrightarrow |m - n| \leq 2$,
- (d) $X = \mathbb{N}$, $mR_d n : \Leftrightarrow \frac{m}{n}$ Potenz von 2 mit ganzzahligen Exponenten,
- (e) $X = \mathbb{N}$, $mR_e n : \Leftrightarrow m|n$,
- (f) $X = \mathbb{R}$, $xR_f y : \Leftrightarrow e^x = e^y$,
- (g) $X = \mathbb{R}$, $xR_g y : \Leftrightarrow x^2 = y^2$,
- (h) $X = \mathbb{Z}$, $aR_h b : \Leftrightarrow 4|(a - b)$,
- (i) **(HA)** $X =$ Menge aller Schüler einer Stadt,
 $aR_i b : \Leftrightarrow a$ besucht die gleiche Schule wie b ,
- (j) X -beliebiges Mengensystem,
 $aR_j b : \Leftrightarrow a$ ist echte Teilmenge von b ,
- (k) $X = \mathbb{N}$, $aR_k b : \Leftrightarrow a \cdot b$ ungerade,
- (l) **(HA)** $X = \mathbb{N}$, $aR_l b : \Leftrightarrow a \cdot b$ gerade,
- (m) $X =$ Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 , $gR_m h : \Leftrightarrow g \parallel h$,
- (n) $X =$ Menge aller Geraden im \mathbb{R}^3 , $gR_n h : \Leftrightarrow g \perp h$,
- (o) $X =$ Menge der Menschen, $\widehat{\text{☺}} R_o \widetilde{\text{☹}} : \Leftrightarrow \widehat{\text{☺}}$ liebt $\widetilde{\text{☹}}$,
- (p) $X = \mathbb{R}$, $xR_p y : \Leftrightarrow x \geq y$,
- (z) $X = \mathbb{N}$, $aR_b b : \Leftrightarrow a$ hat die gleichen Primteiler wie b .

3. Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind Äquivalenzrelationen?

Wie sieht die Faktormenge aus?

4. Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind Ordnungsrelationen?

bitte wenden!

5. Ist $\{X_n\}_{n \in I}$ eine Klasseneinteilung von \mathbb{R} ? Wenn ja, dann geben Sie die dazugehörige Äquivalenzrelation an!
- (a) $X_n = (n - 1, n), I = \mathbb{Z}$,
 - (b) **(HA)** $X_n = [n - 1, n], I = \mathbb{Z}$,
 - (c) $X_n = [n - 1, n), I = \mathbb{Z}$,
 - (d) $X_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in [n - 1, n)\}, I = \mathbb{N}$,
 - (e) **(HA)** $X_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in (n - 1, n]\}, I = \mathbb{N}$.

6. Zeigen Sie, dass folgende Relation auf \mathbb{N}^2 eine Äquivalenzrelation ist:

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2.$$

Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden.

7. Folgt aus der Symmetrie und Transitivität einer Relation deren Reflexivität? (Begründung!)
8. Sei M eine (endliche) Menge mit vier Elementen.
- (a) Wieviel Relationen kann man auf M definieren?
 - (b) Wieviel Äquivalenzrelationen kann man auf M definieren?
 - (Z)** Wie sehen die Resultate für eine beliebige endliche Menge aus?

4. Hausaufgabe

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 4. Übung.

2. Untersuchen Sie, ob folgende Relationen auf X Äquivalenzrelationen sind:

- (a) $X = \mathbb{R}$, $xRy :\Leftrightarrow |\cos x| = |\cos y|$
- (b) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(a, b)R(c, d) :\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- (c) $X = \mathbb{R}^n$, $(x_j)_{j=1}^n R (y_j)_{j=1}^n :\Leftrightarrow x_j \leq y_j \ (j = 1, 2, \dots, n)$
- (d) $X =$ Potenzmenge von Menge M , $xRy :\Leftrightarrow x \subset y$,
- (e) $X = \mathbb{R}$, $xRy :\Leftrightarrow 5|(x - y)$.

Geben Sie gegebenenfalls die Faktormenge an!

3. Man untersuche, ob folgende Relationen Äquivalenzrelationen sind:

- (a) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) : a - b \text{ ist rational}\}$,
- (b) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) : a + b \text{ ist rational}\}$,
- (c) $R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $R = \{((a, b), (c, d)) : a + d = b + c\}$.

4. Die Menge der Dreiecke wurde in

- (a) rechtwinklige, spitzwinklige, stumpfwinklige,
- (b) gleichseitige, gleichschenklige, ungleichseitige

eingeteilt. Ist dadurch eine Klasseneinteilung einer Äquivalenzrelation gegeben? (Begründung!)

Zusatz: Unter der Komposition $R_1 \circ R_2$ zweier Relationen R_1 und R_2 auf der Menge M versteht man alle Paare $(x, y) \in M^2$ für die ein $z \in M$ existiert, so dass $(x, z) \in R_1$ und $(z, y) \in R_2$ gilt. (Man schreibt $(x, y) \in R_1 \circ R_2$.)

(a) Geben Sie zwei symmetrische Relationen an, deren Komposition nicht symmetrisch ist!

(b) Seien auf \mathbb{R} die Relationen

$$xR_1y \quad :\Leftrightarrow \quad x \geq y - 1$$

$$xR_2y \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y + 1$$

gegeben. Wie kann $R_1 \circ R_2$ beschrieben werden? Ist $R_1 \circ R_2$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?

(c) Beantworten Sie diese Fragen, wenn statt R_2 die Relation $xR_2y :\Leftrightarrow x \geq y+1$ betrachtet wird.