

Analysis I

4. Übung – Relationen

1. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ seien folgende Relationen R_1 bis R_6 erklärt:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \quad R_2 = \{(4, 4)\} \cup R_1, \quad (\mathbf{HA}) \quad R_3 = R_2 \cup \{(1, 3)\},$$

$$R_4 = R_3 \cup \{(3, 1)\}, \quad (\mathbf{HA}) \quad R_5 = R_4 \cup \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3)\},$$

$$R_6 = R_2 \cup \{(2, 3), (3, 2), (1, 2), (2, 1)\}.$$

- (a) Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?
- (b) Man ergänze die Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind, durch Hinzufügen möglichst weniger weiterer Elemente aus $M \times M$ zu einer Äquivalenzrelation.
- (c) Man bestimme jeweils alle Äquivalenzklassen.

2. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch

- (a) $X = \mathbb{N}$, $mR_a n : \Leftrightarrow m + n$ gerade,
- (b) **(HA)** $X = \mathbb{N}$, $mR_b n : \Leftrightarrow m + n$ ungerade,
- (c) $X = \mathbb{N}$, $mR_c n : \Leftrightarrow |m - n| \leq 2$,
- (d) $X = \mathbb{N}$, $mR_d n : \Leftrightarrow \frac{m}{n}$ Potenz von 2 mit ganzzahligen Exponenten,
- (e) $X = \mathbb{N}$, $mR_e n : \Leftrightarrow m|n$,
- (f) $X = \mathbb{R}$, $xR_f y : \Leftrightarrow e^x = e^y$,
- (g) $X = \mathbb{R}$, $xR_g y : \Leftrightarrow x^2 = y^2$,
- (h) $X = \mathbb{Z}$, $aR_h b : \Leftrightarrow 4|(a - b)$,
- (i) **(HA)** $X =$ Menge aller Schüler einer Stadt,
 $aR_i b : \Leftrightarrow a$ besucht die gleiche Schule wie b ,
- (j) X -beliebiges Mengensystem,
 $aR_j b : \Leftrightarrow a$ ist echte Teilmenge von b ,
- (k) $X = \mathbb{N}$, $aR_k b : \Leftrightarrow a \cdot b$ ungerade,
- (l) **(HA)** $X = \mathbb{N}$, $aR_l b : \Leftrightarrow a \cdot b$ gerade,
- (m) $X =$ Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 , $gR_m h : \Leftrightarrow g \parallel h$,
- (n) $X =$ Menge aller Geraden im \mathbb{R}^3 , $gR_n h : \Leftrightarrow g \perp h$,
- (o) $X =$ Menge der Menschen, $\hat{\odot} R_o \tilde{\odot} : \Leftrightarrow \hat{\odot}$ liebt $\tilde{\odot}$,
- (p) $X = \mathbb{R}$, $xR_p y : \Leftrightarrow x \geq y$,
- (Z)** $X = \mathbb{N}$, $aR_b : \Leftrightarrow a$ hat die gleichen Primteiler wie b .

3. Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind Äquivalenzrelationen?

Wie sieht die Faktormenge aus?

4. Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind Ordnungsrelationen?

bitte wenden!

5. Ist $\{X_n\}_{n \in I}$ eine Klasseneinteilung von \mathbb{R} ? Wenn ja, dann geben Sie die dazugehörige Äquivalenzrelation an!
- (a) $X_n = (n - 1, n), I = \mathbb{Z}$,
 - (b) **(HA)** $X_n = [n - 1, n], I = \mathbb{Z}$,
 - (c) $X_n = [n - 1, n), I = \mathbb{Z}$,
 - (d) $X_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in [n - 1, n)\}, I = \mathbb{N}$,
 - (e) **(HA)** $X_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in (n - 1, n]\}, I = \mathbb{N}$.

6. Zeigen Sie, dass folgende Relation auf \mathbb{N}^2 eine Äquivalenzrelation ist:

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2.$$

Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden.

7. Folgt aus der Symmetrie und Transitivität einer Relation deren Reflexivität? (Begründung!)
8. Sei M eine (endliche) Menge mit vier Elementen.
- (a) Wieviel Relationen kann man auf M definieren?
 - (b) Wieviel Äquivalenzrelationen kann man auf M definieren?
 - (Z)** Wie sehen die Resultate für eine beliebige endliche Menge aus?

4. Hausaufgabe

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 4. Übung.

2. Untersuchen Sie, ob folgende Relationen auf X Äquivalenzrelationen sind:

- (a) $X = \mathbb{R}, \quad xRy :\Leftrightarrow |\cos x| = |\cos y|$
- (b) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (a, b)R(c, d) :\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- (c) $X = \mathbb{R}^n, \quad (x_j)_{j=1}^n R (y_j)_{j=1}^n :\Leftrightarrow x_j \leq y_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$
- (d) $X = \text{Potenzmenge von Menge } M, \quad xRy :\Leftrightarrow x \subset y,$
- (e) $X = \mathbb{R} \quad xRy :\Leftrightarrow 5|(x - y).$

Geben Sie gegebenenfalls die Faktormenge an!

3. Man untersuche, ob folgende Relationen Äquivalenzrelationen sind:

- (a) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad R = \{(a, b) : a - b \text{ ist rational}\},$
- (b) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad R = \{(a, b) : a + b \text{ ist rational}\},$
- (c) $R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \quad R = \{((a, b), (c, d)) : a + d = b + c\}.$

4. Die Menge der Dreiecke wurde in

- (a) rechtwinklige, spitzwinklige, stumpfwinklige,
- (b) gleichseitige, gleichschenklige, ungleichseitige

eingeteilt. Ist dadurch eine Klasseneinteilung einer Äquivalenzrelation gegeben? (Begründung!)