

Analysis I

3. Übung – Funktionen

1. Geben Sie für folgende Situationen alle Abbildungen $f : I \rightarrow M$ an und entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

(a) $I = \{a_1, a_2\}, M = \{1, 2\}$, (b) $I = \{a\}, M = \{l, m, n\}$, (c) $I = \{a, b\}, M = \{3\}$.

2. Es sei in der Menge M der Menschen (die einmal gelebt haben bzw. noch leben) eine Vorschrift $y = \gamma(x)$ gegeben durch

(a) y ist Vater von x , (b) y ist Sohn von x , (c) y ist Großvater von x ,
(d) y ist älteste Tochter von x .

Ist γ eine Funktion von M in M ?

3. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \rightarrow B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

(a) $A = B = \mathbb{R}, x \mapsto e^x$
(b) $A = \mathbb{R}, B = [0, \infty), x \mapsto e^x$
(c) $A = [0, \infty), B = \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$
(d) $A = B = \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$
(e) $A = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}, B = \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$
(f) $A = B = \mathbb{N}, n \mapsto n^2$
(g) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}, n \mapsto \frac{1}{n}$
(h) $A = B = \mathbb{R}, x \mapsto |2x - 4|$

Geben Sie gegebenenfalls maximale Teilmengen A_1 und B_1 von A bzw. B an, so dass $f : A_1 \rightarrow B_1$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B_1 \rightarrow A_1$.

4. Es seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Aus $A \subset B$ folgt $f(A) \subset f(B)$.
(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
(d) Geben Sie ein Beispiel für $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ an.

5. Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $f : X \rightarrow Y$ ist injektiv.
(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \forall A, B \subset X$.
(c) **(HA)** Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
(d) $f^{-1}(f(A)) = A \forall A \subset X$.
(e) **(HA)** Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \supset B$ ist $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

6. Beweisen Sie: Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ injektiv bzw. surjektiv, so gilt dies auch für $g \circ f : A \rightarrow C$. Kann man für die entsprechenden Aussagen die Bedingungen an f und/oder g abschwächen?

7. Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ fest gewählt. Mit $\langle a, x \rangle$ bezeichnen wir das Skalarprodukt der Vektoren a und $x \in \mathbb{R}^3$. Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \langle a, x \rangle x$ injektiv bzw. surjektiv?

3. Hausaufgabe

1. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

(a) $x \mapsto |\sin x|$, (b) $x \mapsto x^2 - 2x$, (c) $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, (d) $x \mapsto 2^{|x|}$.

Geben Sie gegebenenfalls maximale Teilmengen A und B von \mathbb{R} an, so dass $f : A \rightarrow B$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B \rightarrow A$.

2. Es seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subset X$, $A_1, B_1 \subset Y$.

(a) Zeigen Sie: Aus $A_1 \subset B_1$ folgt $f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(B_1)$.

(b) Überprüfen Sie die Inklusionen

$$f(f^{-1}(A_1)) \subset A_1 \quad \text{und} \quad f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass i.a. keine Gleichheit gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(A_1 \cap B_1) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(B_1)$ gilt.

3. Für welche Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(z, w) \mapsto (az + b, cw + d)$ surjektiv, injektiv, bijektiv?

4. Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $F : A \rightarrow A \times B$, $x \mapsto (x, f(x))$ stets injektiv ist.

5. Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Man finde zwei Funktionen $f : M \rightarrow M$ und $g : M \rightarrow M$, für die $f \circ g \neq g \circ f$ gilt.

6. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 3. Übung.