Analysis I

2. Übung – Mengen

---

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$\begin{array}{ll} M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}, & M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}, \\ M_3 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}, & M_4 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots\}. \end{array}$$

2. Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ an !

3. Wieviel verschiedene Teilmengen hat eine endliche Menge M?

4. Seien A, B Mengen. Zeigen Sie, dass $A \cup B = A \cap B$ dann und nur dann gilt, wenn $A = B$ ist.

5. Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie:
   (a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,
   (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   (c) **(HA)** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
   (d) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, wobei $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,
   (e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

6. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x \leq t\}$. Bestimmen Sie
   (a) $\bigcup\limits_{0<t\leq 1} M_t$, (b) $\bigcap\limits_{0<t\leq 1} M_t$, (c) $\bigcup\limits_{0<t<1} M_t$, (d) **(HA)** $\bigcap\limits_{1\leq t<2} M_t$,
   (e) **(HA)** $\bigcap\limits_{0<t<1} M_t$.

7. Sei I beliebige Indexmenge und $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ Mengensystem mit $M_\alpha \subseteq E$ für bel. $\alpha \in I$. Zeigen Sie

$$\text{(a)} \ \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha^C = \left(\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^C \qquad \text{(b) } \textbf{(HA)} \ \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha^C = \left(\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^C,$$

   wobei M_α^C die Komplementärmenge von M_α (bzgl. E) bezeichnet, d.h. $M_\alpha^c = E \setminus M_\alpha$.

bitte wenden!

2. Hausaufgabe

---

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$\begin{array}{ll} M_1 = \{-1, 1\}, & M_2 = [-1, 1], \\ M_3 = (a, b), & M_4 = (c, d], \\ M_5 = \{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\}, & M_6 = \{-4, -2, +2, 4\}\,. \end{array}$$

2. Geben Sie folgende Mengen durch Angabe ihrer Elemente an:

$$\begin{array}{ll} M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \quad \text{und} \quad x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}, & \\ M_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \quad \text{oder} \quad x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}, & \\ M_3 = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\}, & \\ M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\}, & M_5 = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\}, \\ M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\}, & M_7 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\}, \\ M_8 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\}, & M_9 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}. \end{array}$$

3. Welche Beziehungen (Inklusionen) bestehen zwischen

   (a) der Lösungsmenge A der Gleichung $\sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{5} = 0$,
   der Lösungsmenge B der Gleichung $\sin \frac{x}{3} = 0$ und
   der Lösungsmenge C der Gleichung $\sin \frac{x}{5} = 0$

   (b) der Lösungsmenge L_1 der Gleichung $2 \sin^2 x = 1$ und
   der Lösungsmenge L_2 der Gleichung $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

4. Bilden Sie für die Mengen $M = \{a, b\}, I = \{1, 2, 3\}$ die Mengen $I \times M, M \times I, M^2$!

5. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 2. Übung!