

# Analysis I

## 2. Übung – Mengen

---

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}, & M_2 &= \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}, \\ M_3 &= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}, & M_4 &= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots\}. \end{aligned}$$

2. Geben Sie alle Teilmengen der Menge  $M = \{1, 2, 3\}$  an !
3. Wieviel verschiedene Teilmengen hat eine endliche Menge  $M$ ?
4. Seien  $A, B$  Mengen. Zeigen Sie, dass  $A \cup B = A \cap B$  dann und nur dann gilt, wenn  $A = B$  ist.
5. Seien  $A, B, C$  Mengen. Zeigen Sie:

- (a)  $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ ,  
(b)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ,  
(c) **(HA)**  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ ,  
(d)  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ , wobei  $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ,  
(e)  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ .

6. Für  $t > 0$  sei  $M_t = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq t\}$ . Bestimmen Sie

- (a)  $\bigcup_{0 < t \leq 1} M_t$ , (b)  $\bigcap_{0 < t \leq 1} M_t$ , (c)  $\bigcup_{0 < t < 1} M_t$ , (d) **(HA)**  $\bigcap_{1 \leq t < 2} M_t$ ,  
(e) **(HA)**  $\bigcap_{0 < t < 1} M_t$ .

7. Sei  $I$  beliebige Indexmenge und  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$  Mengensystem mit  $M_\alpha \subset E$  für bel.  $\alpha \in I$ . Zeigen Sie

$$(a) \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha^C = \left( \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^C \quad (b) \text{ **(HA)** } \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha^C = \left( \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^C,$$

wobei  $M_\alpha^C$  die Komplementärmenge von  $M_\alpha$  (bzgl.  $E$ ) bezeichnet, d.h.  $M_\alpha^c = E \setminus M_\alpha$ .

**Zusatz:** Seien  $A, B, C, D$  Mengen. Gilt

$$(A \cap B) \setminus (C \cap D) = (A \setminus C) \cap (B \setminus D)?$$

**bitte wenden!**

## 2. Hausaufgabe

---

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$\begin{aligned}M_1 &= \{-1, 1\}, & M_2 &= [-1, 1], \\M_3 &= (a, b), & M_4 &= (c, d], \\M_5 &= \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}, & M_6 &= \{-4, -2, +2, 4\}.\end{aligned}$$

2. Geben Sie folgende Mengen durch Angabe ihrer Elemente an:

$$\begin{aligned}M_1 &= \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \quad \text{und} \quad x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}, \\M_2 &= \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \quad \text{oder} \quad x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}, \\M_3 &= \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\}, \\M_4 &= \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\}, & M_5 &= \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\}, \\M_6 &= \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\}, & M_7 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\}, \\M_8 &= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\}, & M_9 &= \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}.\end{aligned}$$

3. Welche Beziehungen (Inklusionen) bestehen zwischen

- (a) der Lösungsmenge  $A$  der Gleichung  $\sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{5} = 0$ ,  
der Lösungsmenge  $B$  der Gleichung  $\sin \frac{x}{3} = 0$       und  
der Lösungsmenge  $C$  der Gleichung  $\sin \frac{x}{5} = 0$
- (b) der Lösungsmenge  $L_1$  der Gleichung  $2 \sin^2 x = 1$       und  
der Lösungsmenge  $L_2$  der Gleichung  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ?

4. Bilden Sie für die Mengen  $M = \{a, b\}, I = \{1, 2, 3\}$  die Mengen  $I \times M, M \times I, M^2$ !

5. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 2. Übung!

**Zusatz:** Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:

- (a)  $M_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 7, xy(x+y) = -2\}$ ,
- (b)  $M_b = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m^2 - n^2 = 270\}$ ,
- (c)  $M_c = \{(p, q, n) \in \mathbb{N}^3 : p \text{ prim}, q \text{ prim}, p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)\}$ .