Analysis II

15. Übung – Funktionenfolgen, Funktionenreihen

---

1. Man untersuche die Funktionenfolgen (f_n) auf gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}\,,\ -\infty < x < \infty\,,$ (b) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}\,,\ -\infty < x < \infty\,,$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}\,,\ x \in [0,1]\,,$ (d) **(HA)** $f_n(x) = x^n\,,\ x \in [0, 1-\varepsilon]\ \ (\varepsilon > 0),$

   (e) **(HA)** $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x}\,,\ x \in [0,1]\,.$

2. Man untersuche folgende Reihen auf gleichmäßige Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,,\ x \in (-q,q)\,,\ 0 < q < 1\,,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,,\ x \in (-1,1)\,,$

   (c) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\,,\ x \in [-1,1]\,,$ (d) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})\,,\ x \in [0,1]\,,$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,\ x \in [a,b]\,,\ -\infty < a < b < \infty\,,$ bzw. **(Z)** $x \in \mathbb{R}\,,$

   (f) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$

3. **(HA)** Zeigen Sie, dass für eine 2π-periodische, auf $[-\pi,\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,.$$

4. Zeigen Sie: Bei einer π-periodischen Funktion verschwinden die Fourier-Koeffizienten mit ungeraden Indizes.

5. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourier-Reihe und geben Sie die Summe dieser Fourier-Reihe an:

   (a) $f(x) = \sin ax\ \ (a \neq 0),\ x \in [-\pi,\pi],$ (b) $f(x) = |\cos x|\,,$

   (c) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} \pi + x & : \ -\pi \le x \le 0\,, \\ \pi - x & : \ \ 0 < x \le \pi\,, \end{cases}$

   (d) $f(x) = x\cos x\,,\ -\pi \le x \le \pi\,,$ (e) **(HA)** $f(x) = x\sin x\,,\ -\pi \le x \le \pi\,.$

6. Geben Sie, ausgehend von dem trigonometrischen System $(e^{\mathbf{i}nx})_{-\infty}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem (ONS) zur Entwicklung von Funktionen der Periode $2\ell \neq 2\pi$ an, d.h. ein ONS bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}\,dx\,.$$

   Wie berechnen sich die entsprechenden Fourier-Koeffizienten?

7. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-periodische Funktionen. In welchem Zusammenhang stehen die Fourier-Koeffizienten von f und g, wenn

   (a) $g(x) = f(-x)\,,$ (b) $g(x) = f(x+h)\ \ (h = \text{const} \in \mathbb{R})\,?$