

Analysis II

14. Übung – Integration

1. Man bestimme mit Hilfe (elementarer) Zurückführung auf Grundintegrale

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx, \quad \text{(b)} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx, \quad \text{(c)} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx, \\ \text{(d)} \quad & \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx, \quad \text{(e)} \quad \int \tan^2 x dx, \quad \text{(f) (HA)} \quad \int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx, \\ \text{(g) (HA)} \quad & \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx, \quad \text{(h) (HA)} \quad \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx, \quad \text{(i) (HA)} \quad \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx. \end{aligned}$$

2. Man bestimme mit Hilfe geeigneter Substitutionen

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \text{(b)} \quad \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx, \quad \text{(c)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} \quad \text{(d)} \quad \int \frac{dx}{(x \ln x) \ln(\ln x)}, \\ \text{(e)} \quad & \int \tan x dx, \quad \text{(f)} \quad \int \sin^5 x \cos x dx, \quad \text{(g)} \quad \int \frac{dx}{\sin x} \quad \text{(h) (HA)} \quad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx, \\ \text{(i) (HA)} \quad & \int \frac{x dx}{3-2x^2}, \quad \text{(j) (HA)} \quad \int \frac{e^x}{2+e^x} dx, \quad \text{(k) (HA)} \quad \int x e^{-x^2} dx, \\ \text{(l) (HA)} \quad & \int \frac{dx}{\sinh x}. \end{aligned}$$

3. Man bestimme mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx, \quad \text{(b)} \quad \int \sqrt{x} \ln^2 x dx, \quad \text{(c)} \quad \int \arctan \sqrt{x} dx, \\ \text{(d)} \quad & \int \sin x \ln(\tan x) dx, \quad \text{(e)} \quad \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx, \quad \text{(f)} \quad \int \sin^2 x dx, \\ \text{(g) (HA)} \quad & \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0), \quad \text{(h) (HA)} \quad \int x^2 e^{-2x} dx, \\ \text{(i) (HA)} \quad & \int x^2 \sin 2x dx, \quad \text{(j) (HA)} \quad \int \arctan x dx, \quad \text{(Z)} \quad \int x^n e^x dx. \end{aligned}$$

4. Man berechne mittels Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx, \quad \text{(b)} \quad \int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}, \quad \text{(c)} \quad \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}, \\ \text{(d)} \quad & \int \left(\frac{x}{x^2+3x+2}\right)^2 dx, \quad \text{(e)} \quad \int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}, \quad \text{(f)} \quad \int \frac{dx}{x^4+1}, \\ \text{(g) (HA)} \quad & \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \text{(h) (HA)} \quad \int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx, \\ \text{(i) (HA)} \quad & \int \frac{dx}{x^3+1}, \quad \text{(j) (HA)} \quad \int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}. \end{aligned}$$

5. Man berechne

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx, \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}, \quad \text{(c)} \int \frac{dx}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}, \\
 & \text{(d)} \int \frac{1+x}{1-x} dx, \quad \text{(e)} \int \frac{2x+5}{x^2+4x+6} dx, \quad \text{(f)} \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx, \quad \text{(l) (HA)} \int \frac{dx}{2 \sin 2x}, \\
 & \text{(g)} \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}, \quad \text{(h)} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx, \quad \text{(i) (HA)} \int (\arcsin x)^2 dx, \\
 & \text{(j) (HA)} \int x (\arctan x)^2 dx, \quad \text{(k) (HA)} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.
 \end{aligned}$$

6. Entwickeln Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von

$$\text{(a)} I_n(x) = \int \frac{dx}{\cos^n x}, \quad \text{(b) (HA)} S_n(x) = \int \sin^n x dx.$$

7. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = 2 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ eingeschlossen wird.

8. Sei f über $[-a, a]$ integrierbar. Zeigen Sie:

$$\text{(a)} \text{ Wenn } f \text{ ungerade Funktion ist, dann gilt } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

$$\text{(b) (HA)} \text{ Wenn } f \text{ gerade Funktion ist, dann gilt } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

9. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \int_{-1}^1 x|x| dx, \quad \text{(b)} \int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}, \quad \text{(c)} \int_0^1 \frac{x dx}{a+bx}, \quad \text{(d)} \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

10. Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\text{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx, \quad \text{(b)} \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

11. Beweisen Sie folgende Abschätzungen:

$$\text{(a)} \frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6} \quad \text{(b)} \frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{(Z)} 0 < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x} dx < \frac{1}{100\pi}$$

12. Bestimmen Sie

$$\text{(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_a^x \arctan y dy, \quad \text{(b) (HA)} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sqrt{1+t^4} dt}{x^3}, \quad \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

13. Sei $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ stetig. Man zeige, dass die Funktion

$$\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

monoton wachsend ist.

Zusatz 1:

Berechnen Sie $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, mit Hilfe eines Polynomansatzes

$$\frac{P_n(\ln x)}{Q_{n-1}(x)},$$

wobei P_k und Q_k Polynome k -ten Grades bezeichnen.

Zusatz 2:

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und konkav. Man zeige, dass dann

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

gilt.

14. Hausaufgabe

1. Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + 3x}$, (b) $f(x) = x^n \ln x$ ($n \in \mathbb{N}$), (c) $f(x) = x e^{x^2}$,

(d) $f(x) = \frac{1}{3^x + 1}$.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse!

2. Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist das Integral $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$ eine rationale Funktion?

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Geraden $x = 0$ und den Graphen der Funktionen $y = \cos^2 x$ und $y = \sin^2 x$ begrenzt wird.

4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$?

5. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 14. Übung.

Zusatz: Berechnen Sie

(a) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$, (b) $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, (c) $\int (\tan x) \tan(x+a) dx$,

(d) $\int x f''(x) dx$, (e) $\int \frac{(9 \sin^2 x - 3 \sin^3 x) \cos x - 5 \sin 2x + 10 \cos x}{\sin^4 x - 2 \sin^3 x + 2 \sin x - 1} dx$,

(f) $\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$, (g) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.