Analysis II

12. Übung – Funktionen mehrerer Veränderlicher

Bezeichnungen: Θ ist der Nullpunkt des $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$;
$x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a) = f_{x_j}(a)$

1. Man zeige, dass $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ und $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ existieren, $\lim\limits_{x\to\Theta} f(x)$ aber nicht:

   (a) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ (b) **(HA)** $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$

2. Man zeige, dass für $f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2)\sin\dfrac{1}{x_1}\sin\dfrac{1}{x_2}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ und $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ nicht existieren, aber $\lim\limits_{x\to\Theta} f(x) = 0$ gilt.

3. Berechnen Sie

   (a) **(HA)** $\lim\limits_{x\to\Theta}\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^4 + x_2^4}$, (b) $\lim\limits_{x\to(0,a)}\dfrac{\sin(x_1x_2)}{x_1}$ $(a\in\mathbb{R})$, (c) **(HA)** $\lim\limits_{x\to(\infty,a)}\left(1 + \dfrac{1}{x_1}\right)^{\frac{x_1^2}{x_1+x_2}}$.

4. Man zeige, dass $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & : & x \neq \Theta \\ 0 & : & x = \Theta \end{array}\right\}$ in $x_0 = \Theta$ nicht stetig ist, obwohl f in $x_0 = \Theta$ längs jeder Halbgeraden $\{(t\cos\alpha, t\sin\alpha) : 0 \le t < \infty\}$ stetig ist.

5. (a) Man bestimme $\partial_1 f(x_1, 1)$ für $f(x_1,x_2) = x_1 + (x_2 - 1)\arcsin\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$.

   (b) Sei $f(x_1,x_2) = \operatorname{sgn}(x_1x_2)\sqrt[3]{|x_1x_2|}$. Berechnen Sie $\partial_k f(\Theta)$ für $k = 1, 2$. Ist f in $x_0 = \Theta$ differenzierbar?

6. **(HA)** Man zeige, dass für $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{x_1x_2(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & : & x \neq \Theta \\ 0 & : & x = \Theta \end{array}\right\}$ die partiellen Ableitungen $\partial_2\partial_1 f(\Theta)$ und $\partial_1\partial_2 f(\Theta)$ existieren, aber nicht übereinstimmen.

7. Man leite $f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}$ in Richtung der Geraden

   (a) $x_2 = x_1$, (b) $x_2 = 2x_1 + 1$, (c) **(HA)** $x_2 = 0$, (d) **(HA)** $x_1 = 0$

   ab. Man gebe die Richtung der Geraden so vor, dass die Richtungsableitung im Punkt

   (a) $(1,1)$, (b) $(1,3)$, (c) $(1,0)$, (d) $(0,1)$

   positiv wird.

8. **(HA)** Es sei $f : \{x \in \mathbb{R}^3 : x_k > 0,\ k = 1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[x_2]{x_1x_2x_3}$. Man bestimme die Richtungsableitungen von f in die Richtungen, die durch die Vektoren $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$ bzw. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ gegeben sind.

9. Es sei $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$. In welche Richtung ist die Ableitung im Punkt $x_0 = (1,1)$

   (a) gleich Null, (b) am größten, (c) am kleinsten?

10. Seien $\Omega = \left\{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\right\}$ und

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \Theta\,, \quad (r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,.$$

Man zeige die Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitung dieser Funktion sowie deren Determinante.

(Z) Bestimmen Sie Umkehrabbildung f^{-1} und deren Ableitung.

11. **(HA)** Man begründe die Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitung und deren Determinante der Funktion

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \quad (r,\varphi,\theta) \mapsto (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,,$$

wobei $\Omega = \{(r,\varphi,\theta) : 0 < r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}$.

(Z) Bestimmen Sie Umkehrabbildung f^{-1} und deren Ableitung.

12. Man untersuche folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf lokale und globale Extremwerte

(a) $f(x_1,x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2$ (b) **(HA)** $f(x_1,x_2) = e^{x_1-x_2}(x_1^2 - 2x_2^2)$

13. Bestimmen Sie die Extremstellen von $f(x_1,x_2)$ unter den angegebenen Nebenbedingungen

(a) $f(x_1,x_2) = 6 - 4x_1 - 3x_2$, wobei $x_1^2 + x_2^2 = 1$,

(b) $f(x_1,x_2) = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2$, wobei $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4}$.

Lösen Sie die Aufgaben auch mit Hilfe der Lagrange Multiplikatoren! Untersuchen Sie die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion auf Definitheit. Diskutieren Sie das Resultat!

14. Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert von $f(x_1,x_2)$ im angegebenen Gebiet:

(a) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2\,,\quad x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_1 + x_2 \ge -3$

(b) **(HA)** $f(x_1,x_2) = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin\,(x_1 + x_2)\,,\quad 0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le x_2 \le \frac{\pi}{2}$

15. Unter welcher Bedingung ist durch $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x} = 0 \quad (x \ne 0)$ eine Funktion $y(x)$ gegeben? Berechnen Sie unter dieser Bedingung $\dfrac{dy}{dx}$ und $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

16. Durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad a,b,c > 0\,,$$

sei eine implizite Funktion $z = f(x,y)$ gegeben. Man bestimme ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung!

17. Man bestimme von folgenden, implizit gegebenen Funktionen (a) $y = f(x)$ bzw. (b) $z = f(x,y)$ die Extremstellen:

(a) $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$

(b) **(HA)** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

18. Man zerlege die Zahl $a > 0$ in drei nichtnegative Summanden, so dass deren Produkt möglichst groß wird. Man beweise mit dem gewonnenen Resultat, dass das arithmetische Mittel dreier Zahlen $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ nicht kleiner ist als ihr geometrisches Mittel, d.h.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \ge \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\,.$$

19. **(HA)** Unter allen in eine Kugel einbeschriebenen Zylindern ist der Zylinder maximalen Volumens zu finden!

20. Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y) = x^y$ im Punkt $(1, 0)$ nach Taylor bis zu Anteilen 2. Ordnung!

Zusatz: Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ werde aus der Funktion $U(x, y)$ die Funktion $u(r, \varphi) := U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Zeigen Sie, dass der Differentialausdruck

$$x\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{übergeht in} \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,.$$

(Hinweis: Heuser: Analysis, Teil 2, Nummer 165.)

12. Hausaufgabe

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 12. Übung.

2. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

   (a) Sei $f(x, y) := \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq \Theta$. Dann ist $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

   (b) Sei $f(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ für $(x, y, z) \neq \Theta$. Dann ist $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$

3. Sind die Funktionen

   $$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1,\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + \cos(x_1 x_3) \text{ bzw. } g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 e^{x_2} \\ x_2 x_1^5 \end{bmatrix}$$

   (a) stetig auf $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$, (b) differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$?

   Geben Sie gegebenenfalls die Ableitungen an!

4. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktionen $f(x, y) = xy^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$

   (a) ohne Lagrange Multiplikatoren, (b) mit Lagrange Multiplikatoren.

   (Vgl. Heuser: Analysis, Teil 2, Nr. 174.)

5. Zeigen Sie: Die Extremwerte der Funktion

   $$f(x, y, z) = x^2 + y + z$$

   auf der Oberfläche der Einheitskugel des $\mathbb{R}^3$ sind $\dfrac{3}{2}$ und $-\sqrt{2}$.

6. Berechnen Sie näherungsweise $1{,}05^{1{,}02}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-4}. Nutzen Sie dazu die Taylorentwicklung für die Funktion $f(x, y) = x^y$ im Punkt $x_0 = y_0 = 1$ bis $n = 2$. (Vgl. Heuser: Analysis, Teil 2, Nr. 168.)