

Analysis II

10. Übung – Gleichmäßige Stetigkeit

1. Sei I ein beliebiges Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig auf** I , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

gilt. Wann ist eine Funktion nicht gleichmäßig stetig?

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \frac{2}{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \frac{1}{x}$, nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \frac{2}{\pi}]$ ist.

(Literatur: Fichtenholz, Band I, Nr. 86)

3. Beweisen Sie den **Satz von Cantor**: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f auf $[a, b]$ auch gleichmäßig stetig!

(Literatur: Fichtenholz, Band I, Nr. 87)

4. Untersuchen Sie die Funktionen aus Aufgabe 6 der 8. Übung auf gleichmäßige Stetigkeit!

(HA) 6 (f), (g) und (h)

5. Sei $f : [A, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ mit a endlich! Zeigen Sie, dass dann f auf $[A, \infty)$ gleichmäßig stetig ist!

(HA) Ist die Bedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ (a endlich) notwendig?

6. Sei I ein offenes Intervall. Beweisen Sie: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung f' auf I beschränkt. Dann ist f auf I gleichmäßig stetig.

(HA) Gilt auch die Umkehrung: Wenn f differenzierbar und gleichmäßig stetig auf I ist, dann ist f' dort beschränkt?

10. Hausaufgabe

1. Sei $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & : x \in [0, 2] \\ ax+b & : x \in [-2, 0) \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f eine stetige Funktion auf $[-2, 2]$ wird!
(b) Untersuchen Sie die stetigen Funktionen aus (a) auf gleichmäßige Stetigkeit.
(c) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f eine auf $(-2, 2)$ differenzierbare Funktion wird.
(d) Untersuchen Sie die differenzierbaren Funktionen aus (c) auf gleichmäßige Stetigkeit.

2. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 10. Übung!