

Analysis I

1. Übung – Wiederholung

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Es gilt $|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.
- (c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- (d) Es gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- (e) $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- (f) **(HA)** $||y - x| - |z - y|| \leq |x - z| \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Sei $a \geq 0$ fixiert und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|x| \leq a$ genau dann, wenn $-a \leq x \leq a$ gilt.

3. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen

- (a) $|x - 2| \geq 10$, (b) **(HA)** $|x| > |x + 1|$, (c) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$,
- (d) **(HA)** $|x + 2| - |x| > 1$, (e) $|x - 1| \cdot |x - 2| = 2$, (f) **(HA)** $|x| + |x + 1| + |x - 1| = 3$?

4. Veranschaulichen Sie in der xy -Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

- (a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x + y| \leq 1$, **(HA)** (c) $1 \leq |x - y| \leq 2$.

5. Verwenden Sie die Beziehungen

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

und

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:

- (a) $\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \alpha$,
- (b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,
- (c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$,
- (d) **(HA)** $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,
- (e) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,
- (f) **(HA)** $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

6. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:

- (a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$,
- (b) **(HA)** $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5$,
- (c) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a, \quad \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b \quad (a, b \in \mathbb{R} \text{ fixiert})$,
- (d) **(HA)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

7. Man löse folgende Ungleichungen:

(a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}$, (b) **(HA)** $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$,
(c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$, (d) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$.

8. (a) Wir wollen den Wert eines Polynoms vierten Grades,

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

in einem Punkt x_0 ermitteln. Welche der folgenden Berechnungsvarianten ist günstiger?

- $p(x_0) = ax_0^4 + bx_0^3 + cx_0^2 + dx_0 + e$,
- $p(x_0) = \{[(ax_0 + b)x_0 + c]x_0 + d\}x_0 + e$.

(b) Stellen Sie das geeignetere Verfahren schematisch dar. Erproben Sie das Schema an den Beispielen

$$3x^4 + 2x - 1, x_0 = -1 \text{ und (HA) } 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, x_0 = \frac{1}{2}.$$

9. Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an

(a) $x^2 + 6x$, (b) **(HA)** $z^2 - \frac{10}{7}z$, (c) **(HA)** $\frac{16}{49}t^2 - \frac{16}{21}t$,

und leiten Sie die Lösungsformel für quadratische Gleichungen her!

10. Zeigen Sie, dass folgende Zahlen irrational sind:

(a) $\sqrt{2}$, (b) **(HA)** $\sqrt{5}$.

11. Gibt es unendlich viele Primzahlen? Beweisen Sie Ihre Antwort!

1. Hausaufgabe

1. Zeigen Sie, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $\pm x \leq |x|$, (b) $|x| = |-x|$.

2. Machen Sie den Nenner rational:

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{3+2}}$, (c) $\frac{1}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

3. Lösen sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 1. Übung!

4. Dividieren Sie:

(a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$,
(b) $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.

5. Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{16 - 49m^2}{16 - 28m}$, (b) $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$, (c) $\frac{a}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a+b}$,
(d) $\frac{\frac{a+1}{a-1} - 1}{\frac{a+1}{a-1} + 1}$, (e) $\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - (\frac{1}{x})^2}$, (f) $(a^{-x})^{-2y}$, (g) $(-a^{-3})^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$),

$$(h) \left(\frac{b^{-5}x^2}{a^{-6}y^{-4}} \right)^4 \cdot \left(\frac{a^4b^{-3}}{x^{-1}y^{-2}} \right)^{-6}, \quad (i) a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}, \quad (j) a^{\frac{5}{3}} : a^{\frac{2}{5}},$$

$$(k) \sqrt[5]{a^2b^2} \sqrt[3]{ab^4} ab^{-1}, \quad (l) \sqrt[3]{a\sqrt{b}}, \quad (m) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

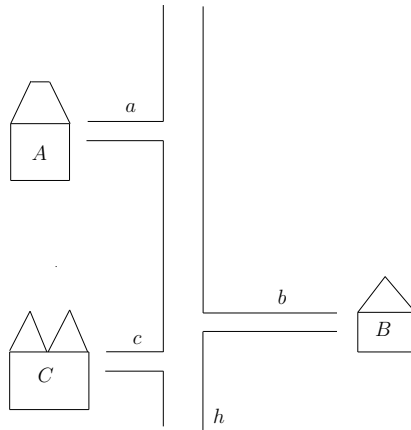
6. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

$$(a) \frac{\sqrt[n]{x^{2n-3}} \cdot (\sqrt[n]{x})^{n+7}}{\sqrt[n]{x^4}} = x^3, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(b) \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4-x^4}} (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = (a-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad a > 0,$$

$$(c) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}.$$

7. Ein Dorf besteht aus nur drei Häusern A, B, C mit jeweils gleich vielen Bewohnern, die über die Wege a, b, c mit der Hauptstraße h verbunden sind (siehe Skizze). Das Dorf soll eine Bushaltestelle H für den entlang der Hauptstraße h verkehrenden Linienbus erhalten. Wohin würden Sie die Haltestelle H bauen, wenn die Dorfbewohner im Mittel einen möglichst kurzen Weg zur Haltestelle haben sollen?



Zusatz: Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a) (\log_2 x)^{-1} - (\log_2 x - 1)^{-1} < 1, \quad (b) \sin x + \cos x = 1,$$

$$(c) \lg(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}) - 2 = \frac{1}{4} \lg 16 - \sqrt{x + \frac{1}{4}} \lg 4.$$