Prüfungsfragen Analysis I (Wintersemester 2010/2011)

1. Definieren Sie Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Produkt von Mengen. Zeigen Sie die Identitäten $(\cup_{\alpha\in I}E_\alpha)^c = \cap_{\alpha\in I}E_\alpha^c, \quad (\cap_{\alpha\in I}E_\alpha)^c = \cup_{\alpha\in I}E_\alpha^c$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

2. Definieren Sie die Begriffe Abbildung, injektiv, surjektiv, bijektiv. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann injektiv ist, wenn $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge A von X gilt. Was ist und wann existiert die Umkehrabbildung?

3. Was versteht man unter Gleichmächtigkeit von Mengen? Erläutern Sie die Begriffe endlich, unendlich, abzählbar, höchstens abzählbar, überabzählbar. Geben Sie Beispiele an. Bestimmen Sie die Kardinalzahlen von $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ (mit Beweis).

4. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge eine größere Mächtigkeit als die Ausgangsmenge hat.

5. Definieren Sie die Begriffe Relation, Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation. Geben Sie Beispiele an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen? Geben Sie auch hierzu Beispiele an.

6. Was sind und was sollen komplexe Zahlen? Wieso bilden die komplexen Zahlen einen Körper?

7. Was besagt der Fundamentalsatz der Algebra? Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = a$.

8. Was versteht man unter unter einer konvergenten Folge und ihrem Grenzwert? Formulieren und beweisen Sie Aussagen über Produkte und Quotienten konvergenter Folgen sowie über den Grenzübergang in Ungleichungen.

9. Definieren Sie die Begriffe Supremum, Infimum, Maximum, Minimum. Zeigen Sie, dass eine monotone Folge genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum n^{-2}$ konvergiert.

10. Was versteht man unter Teilfolgen und partiellen Grenzwerten? Formulieren und beweisen Sie den Satz von Bolzano und Weierstraß.

11. Definieren Sie folgende Begriffe für Mengen im $\mathbf{R}^n$: offen, abgeschlossen, Häufungspunkt. Zeigen Sie, dass die Vereinigung beliebig vieler und der Durschnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen ist. Zeigen Sie, dass $\emptyset$ und $\mathbf{R}^n$ die einzigen Mengen sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

12. Zeigen Sie, dass eine Menge im $\mathbf{R}^n$ genau dann abgeschlossen ist, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält. Zeigen Sie, dass jede nichtleere abgeschlossene und beschränkte Menge im $\mathbf{R}$ ein Maximum und ein Minimum besitzt.

13. Zeigen Sie, dass die Menge der partiellen Grenzwerte einer beschränkten reellen Folge stets nichtleer, abgeschlossen und beschränkt ist. Was versteht man unter oberem und unterem Grenzwert einer Folge?

14. Was ist eine Cauchy-Folge? Zeigen Sie, dass eine komplexe Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Inwiefern sind $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ vollständig, $\mathbf{Q}$ aber nicht?

15. Definieren Sie folgende Begriffe: Reihe, konvergente Reihe, Summe einer Reihe. Wann konvergiert die geometrische Reihe, und was ist ihre Summe (mit Beweis)?
16. Formulieren und beweisen Sie Vergleichskriterien sowie das Wurzel- und Quotientenkriterium. Geben Sie Beispiele an.
17. Formulieren und beweisen Sie das Konvergenzkriterium von Leibniz. Erläutern Sie, inwiefern die Voraussetzungen in diesem Kriterium wesentlich sind.
18. Was versteht man unter absoluter Konvergenz? Zeigen Sie, dass aus der absoluten Konvergenz die Konvergenz folgt, und beweisen Sie die Ungleichung $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.
19. Was versteht man unter einer Umordnung einer Reihe? Formulieren Sie den Umordnungssatz, den Riemannschen Umordnungssatz und den großen Umordnungssatz. Machen Sie plausibel, dass eine bedingt konvergente Reihe so umgeordnet werden kann, dass ihre Summe eine beliebig vorgegebene Zahl ist.
20. Was versteht man unter dem Produkt von Reihen? Formulieren Sie den Doppelreihensatz. Bestimmen Sie die Summe von $\sum nx^n$.
21. Was kann über das Konvergenzgebiet von Potenzreihen ausgesagt werden? Geben Sie Beispiele an. Beweisen Sie die Formel von Cauchy und Hadamard für den Konvergenzradius.
22. Definieren Sie die Exponentialfunktion im Komplexen. Formulieren und beweisen Sie Eigenschaften dieser Funktion.
23. Definieren Sie den Begriff des Grenzwerts und des einseitigen Grenzwerts einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen. Definieren Sie für solche Funktionen den Begriff der Stetigkeit. Geben Sie Beispiele an. Zeigen Sie, dass das Produkt stetiger Funktionen wieder stetig ist.
24. Zeigen Sie, dass die Summe einer Potenzreihe im Innnern des Konvergenzintervalls stetig ist. Geben Sie Beispiele an. Wie verhält es sich mit der Hintereinanderausführung stetiger Funktionen?
25. Formulieren und beweisen Sie den Satz von Weierstraß und den Zwischenwertsatz.
26. Formulieren Sie den Satz über die Umkehrfunktion von stetigen und monotonen Funktionen. Definieren Sie die Winkel- und Hyperbelfunktionen im Reellen und deren Umkehrfunktionen.
27. Erläutern Sie die Symbole $f(x) = h(x) + O(g(x))$, $f(x) = h(x) + o(g(x))$, $f(x) \simeq g(x)$, $f(x) \sim g(x)$. Geben Sie Beispiele an.
28. Definieren Sie den Begriff des Grenzwerts einer reellen Funktion mehrerer reeller Veränderlicher. Definieren Sie für solche Funktionen den Begriff der Stetigkeit. Geben Sie Beispiele an.
29. Definieren Sie Richtungsgrenzwerte und iterierte Grenzwerte für Funktionen zweier reeller Veränderlicher. Diskutieren Sie Zusammenhänge zwischen diesen Grenzwerten und dem üblichen Grenzwert. Geben Sie Beispiele an.
30. Definieren Sie den Begriff eines stetigen Vektorfeldes. Geben Sie Beispiele an. Formulieren Sie den Igelsatz. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ genau dann stetig ist, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.