Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt

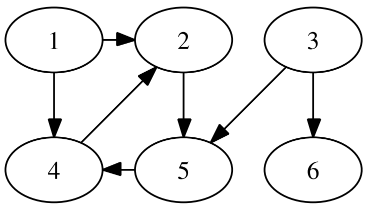
Chemnitz, den 22.02.2005

Klausur Theoretische Informatik I
WS 2004/2005

Studiengang Mechatronik

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

(a) Geben Sie die „Darstellung mittels zweier Arrays" des folgenden gerichteten Graphen an.



(b) Ein Kreis der Länge 2 in einem gerichteten Graphen ist ein Weg (v_0, v_1, v_0), wobei $v_0 \neq v_1$ ist. Wir betrachten die Kreise (v_0, v_1, v_0) und (v_1, v_0, v_1) als gleich.

Wieviele verschiedene Kreise der Länge 2 kann es in einem gerichteten Graphen mit n Knoten maximal geben?

(c) Geben Sie die Anzahl der verschiedenen gerichteten Graphen mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ an.

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)

Sei G ein gerichteter Graph. Betrachten Sie die folgende Implikation:

„G hat einen Kreis, der von Knoten s aus erreichbar ist.
$\Longrightarrow$
Bei der Breitensuche $BFS(G, s)$ (also mit s als Startknoten) wird eine Kante zu einem bereits abgeschlossenen Knoten (also eine Kante von einem grauen zu einem schwarzen Knoten) entdeckt.“

(a) Begründen Sie die Korrektheit der Aussage.

Hinweis: Machen Sie sich dazu Gedanken, welche Kante des Kreises $(v_0, v_1, \dots, v_k = v_0)$ in G die Aussage erfüllt.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Rückrichtung obiger Implikation nicht gilt.

Aufgabe 3 (2+3+3 Punkte)

(a) Seien $\varepsilon > 0$ (klein) und k (groß) beliebige Konstanten. Zeigen Sie, daß

$$2^{\varepsilon \cdot x} > x^k$$

für alle hinreichend großen $x > x_0(\varepsilon, k)$ gilt.

Verwenden Sie die Beziehung $2^{\varepsilon' \cdot x} > x$ für alle $x > x_0(\varepsilon')$ und $\varepsilon' > 0$ konstant.

(b) Gilt die folgende Aussage?

$$2^{1+\Omega(\log n)} \text{ ist } O(n).$$

Geben Sie eine kurze Begründung ihrer Antwort an.

(c) Zeigen Sie

$$\frac{2}{1 - 1/n} \text{ ist } 2 \cdot (1 + O(1/n)).$$

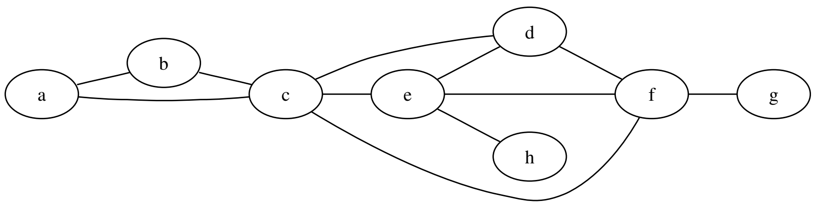
Aufgabe 4 (3+5 Punkte)

(a) Betrachten Sie folgende Aussage:

„Alle Knoten einer zweifachen Zusammenhangskomponente haben den gleichen low-Wert.“

Geben Sie an, ob die Aussage gilt oder nicht gilt. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(b) Bestimmen Sie in dem folgenden Graphen die zweifachen Zusammenhangskomponenten und die low-Werte. Benutzen Sie eine Tiefensuche beginnend vom Knoten e und nehmen Sie an, daß alle Adjazenzlisten alphabetisch geordnet sind.



Aufgabe 5 (5+4 Punkte)

(a) Transformieren Sie die folgende Formel in eine erfüllbarkeitsäquivalente 3-KNF. Benutzen Sie den Polynomialzeitalgorithmus der Vorlesung.

$$\neg(u \vee (v \iff w))$$

(b) Demonstrieren Sie an folgendem Beispiel den Ablauf des Polynomialzeitalgorithmus für die Erfüllbarkeit von 2-KNF-Formeln.

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_4 \vee x_3)$$

Aufgabe 6 (5+6 Punkte)

(a) Lösen Sie die folgende Rekursionsgleichung.

$$\begin{aligned} T(0) &= 2 \\ T(1) &= 3 \\ T(n) &= 3 \cdot T(n-1) - 2 \cdot T(n-2) \qquad \text{für alle } n \geq 2 \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie die folgende Rekursionsgleichung. Sie können davon ausgehen, daß n eine Zweierpotenz ist.

$$\begin{aligned} T(1) &= c \qquad\qquad (c > 0) \\ T(n) &= 5 \cdot T(n/2) + n^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Sei $S(A)$ ein beliebiger Algorithmus, der ein gegebenes Feld A aufsteigend sortiert. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus, der ein gegebenes Feld `A[1..n]` aufsteigend sortiert:

```
boolean sortiert=true;

for(i=1;i<n;i=i+1)
     if (A[i]>A[i+1]) {
          sortiert=false;
          break;
     }

if(sortiert==false)
     S(A);
```

Sei T der Entscheidungsbaum von S für $n = 5$. Zeichnen Sie den Entscheidungsbaum von obigem Algorithmus für $n = 5$ unter Verwendung von T.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Wir betrachten den Algorithmus zur Bestimmung der längsten gemeinsamen Teilfolge, der auf dynamischer Programmierung basiert.

Demonstrieren Sie diesen Algorithmus bei der Eingabe von „ababcd“ und „bcacd“ durch Ausfüllen der zugehörigen Tabelle.

Aufgabe 9 (2+5+4+4+6 Punkte)

(a) Geben Sie das Auswahlproblem an.

(b) Erläutern Sie den Linearzeitalgorithmus der Vorlesung für das Auswahlproblem. Ignorieren Sie dabei die Teilbarkeitsprobleme, die bei der Division auftreten können.

(c) Geben Sie die Rekursionsgleichung an, die die worst-case Laufzeit des Algorithmus aus (b) abschätzt.

(d) Betrachten Sie die Modifikation des Algorithmus aus (b), bei der statt der 5er Gruppen nun 3er Gruppen benutzt werden. Geben Sie die Rekursionsgleichung an, die die worst-case Laufzeit des modifizierten Algorithmus abschätzt.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Rekursionsgleichung, daß der modifizierte Algorithmus aus (d) die Laufzeit $O(n \log n)$ hat.