

Wiederholungsklausur
Theoretische Informatik I
WS 2005/2006
Studiengang Informatik

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

- (a) Wir betrachten zwei natürliche Zahlen mit n Ziffern.
 - (a1) Geben Sie die Laufzeit des schnellsten aus der Vorlesung bekannten Multiplikationsalgorithmus in Abhängigkeit von n an.
 - (a2) Geben Sie die Laufzeit der Schulmethode der Multiplikation an.
- (b) Zeigen Sie $1/(1 - 1/n)$ ist $1 + O(1/n)$.

Aufgabe 2 (minimaler Spannbaum) (3+4 Punkte)

Wir betrachten ungerichtete Graphen G mit beliebigen Kantengewichten $D[u, v]$. G habe genau eine Kante e von maximalem Gewicht. Wir betrachten das Problem des minimalen Spannbaums.

- (a) Zeigen Sie: e kommt in einem minimalen Spannbaum vor $\Rightarrow e$ kommt in jedem minimalen Spannbaum vor.
- (b) Skizzieren Sie einen Linearzeitalgorithmus, der testet, ob e in einem minimalen Spannbaum vorkommt. Die Eingabe für den Algorithmus ist *kein* Spannbaum, sondern der Ausgangsgraph. Begründen Sie die lineare Laufzeit.

Aufgabe 3

(2+3+3 Punkte)

Wir betrachten folgende Modifikation unseres linearen Auswahlalgorithmus `LinSelect(A, i)` der Vorlesung: Wir arbeiten mit 3er Unterteilungen statt mit 5er Unterteilungen von A .

- (a) Geben Sie die Rekursionsgleichung für die Laufzeit an.
- (b) Geben Sie die Anzahl der Blätter des Prozeduraufrufbaums an.
- (c) Schätzen Sie die Laufzeit des Verfahrens ab.

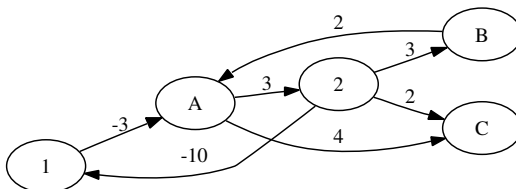
Aufgabe 4 (Floyd Warshall)

(3+3+2+4 Punkte)

Wir betrachten gerichtete, gewichtete Graphen gegeben durch eine Gewichtsmatrix wie üblich:

- Knotenmenge $V = \{ 1, \dots, n \}$.
 - Gewichtsmatrix $D[u, v]$. ($D[u, v] = \infty$ wenn keine Kante (u, v) , $D[u, v]$ eine beliebige ganze Zahl wenn Kante (u, v) und $D[u, u] = 0$.)
- (a) Geben Sie den Floyd Warshall Algorithmus für den durch $D[u, v]$ gegebenen Graphen an! (Initialisierung ist nicht erforderlich.)
 - (b) Wir betrachten 2 feste Knoten, etwa $a = 10$ und $b = 11$. Wir lassen den Floyd Warshall Algorithmus laufen und halten ihn an, nachdem seine äußerste Schleife ihren zweiten Durchlauf beendet hat. Jetzt steht in $D[a, b]$ die kleinste Weglänge von bestimmten Wegen $a \rightsquigarrow b$.
Geben Sie diese Wege explizit an!
 - (c) Geben Sie einen (allgemeinen) gerichteten, gewichteten Graphen an und zwei Knoten u, v mit $u \neq v$, so daß gilt: Der Floyd Warshall Algorithmus hat am Ende in $D[u, v]$ nicht (!!) das gewünschte Ergebnis stehen.
 - (d) Wir betrachten einen modifizierten Längenbegriff: Die Länge eines Weges $u \rightsquigarrow v$ ist das größte Gewicht einer auf dem Weg vorkommenden Kante.

- (d1) Ermitteln Sie die kürzesten Wege $A \rightsquigarrow B$ und $B \rightsquigarrow C$ im angegebenen Sinne in folgendem Graphen.



- (d2) Modifizieren Sie den Floyd Warshall Algorithmus, so daß er die kürzesten Weglängen gemäß dem hier betrachteten Längenbegriff findet.

Aufgabe 5 (Max Sat)

(3+4 Punkte)

Wir betrachten aussagenlogische Konjunktionen bestehend aus 2 Literalen, wie $a \wedge b$ oder $b \wedge \neg c$. Vollständig widersprüchliche Konjunktionen wie $a \wedge \neg a$ sind verboten. Dazu das natürliche Maximierungsproblem:

Eingabe: m Konjunktionen C_1, \dots, C_m über n aussagenlogischen Variablen.

Ausgabe: Eine Belegung π , der n Variablen, die möglichst viele der C_i erfüllt.

- (a) Wieviele Konjunktionen können in jedem Fall erfüllt werden? Geben Sie eine möglichst gute Schranke an.
- (b) Geben Sie das kleinste $d \leq 2$ an, so daß gilt: Das vorliegende Maximierungsproblem kann in Zeit $O(m^k \cdot d^n)$ ($k = \text{konstant}$) optimal gelöst werden. (Mit kurzer Begründung.)

Aufgabe 6 (Hamilton-Kreis)

(1+2+3 Punkte)

Wir betrachten den schnellsten Algorithmus der Vorlesung, der überprüft ob ein gegebener Graph einen Hamilton-Kreis besitzt.

- (a) Was ist ein Hamilton-Kreis?

- (b) Welche Laufzeit hat der Algorithmus? (Mit kurzer Begründung.)
- (c) Füllen Sie die Tabelle auf dem Lösungsblatt für folgenden Graphen aus.

