

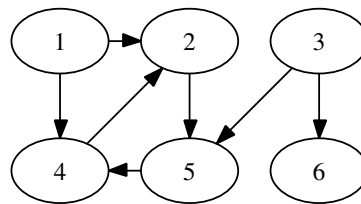
Klausur Theoretische Informatik I WS 2004/2005

alle Studiengänge außer Mechatronik

Aufgabe 1

(2+2+2 Punkte)

- (a) Geben Sie die „Darstellung mittels zweier Arrays“ des folgenden gerichteten Graphen an.



- (b) Ein Kreis der Länge 2 in einem gerichteten Graphen ist ein Weg (v_0, v_1, v_0) , wobei $v_0 \neq v_1$ ist. Wir betrachten die Kreise (v_0, v_1, v_0) und (v_1, v_0, v_1) als gleich.
Wieviele verschiedene Kreise der Länge 2 kann es in einem gerichteten Graphen mit n Knoten maximal geben?
- (c) Geben Sie die Anzahl der verschiedenen gerichteten Graphen mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ an.

Aufgabe 2

(4+4 Punkte)

Sei G ein gerichteter Graph. Betrachten Sie die folgende Implikation:

„ G hat einen Kreis, der von Knoten s aus erreichbar ist.

\implies

Bei der Breitensuche $BFS(G, s)$ (also mit s als Startknoten) wird eine Kante zu einem bereits abgeschlossenen Knoten (also eine Kante von einem grauen zu einem schwarzen Knoten) entdeckt.“

(a) Begründen Sie die Korrektheit der Aussage.

Hinweis: Machen Sie sich dazu Gedanken, welche Kante des Kreises $(v_0, v_1, \dots, v_k = v_0)$ in G die Aussage erfüllt.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Rückrichtung obiger Implikation nicht gilt.

Aufgabe 3

(2+3+3 Punkte)

(a) Seien $\varepsilon > 0$ (klein) und k (groß) beliebige Konstanten. Zeigen Sie, daß

$$2^{\varepsilon \cdot x} > x^k$$

für alle hinreichend großen $x > x_0(\varepsilon, k)$ gilt.

Verwenden Sie die Beziehung $2^{\varepsilon' \cdot x} > x$ für alle $x > x_0(\varepsilon')$ und $\varepsilon' > 0$ konstant.

(b) Gilt die folgende Aussage?

$$2^{1+\Omega(\log n)} \text{ ist } O(n).$$

Geben Sie eine kurze Begründung ihrer Antwort an.

(c) Zeigen Sie

$$\frac{2}{1 - 1/n} \text{ ist } 2 \cdot (1 + O(1/n)).$$

Aufgabe 4

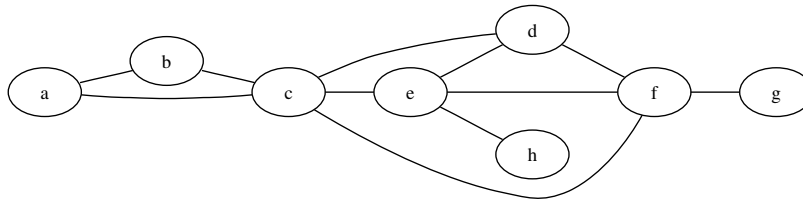
(3+5 Punkte)

- (a) Betrachten Sie folgende Aussage:

„Alle Knoten einer zweifachen Zusammenhangskomponente haben den gleichen low-Wert.“

Geben Sie an, ob die Aussage gilt oder nicht gilt. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

- (b) Bestimmen Sie in dem folgenden Graphen die zweifachen Zusammenhangskomponenten und die low-Werte. Benutzen Sie eine Tiefensuche beginnend vom Knoten e und nehmen Sie an, daß alle Adjazenzlisten alphabetisch geordnet sind.

**Aufgabe 5**

(5+4 Punkte)

- (a) Transformieren Sie die folgende Formel in eine erfüllbarkeitsäquivalente 3-KNF. Benutzen Sie den Polynomialzeitalgorithmus der Vorlesung.

$$\neg(u \vee (v \iff w))$$

- (b) Demonstrieren Sie an folgendem Beispiel den Ablauf des Polynomialzeitalgorithmus für die Erfüllbarkeit von 2-KNF-Formeln.

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_4 \vee x_3)$$

Aufgabe 6

(5+6 Punkte)

(a) Lösen Sie die folgende Rekursionsgleichung.

$$\begin{aligned}T(0) &= 2 \\T(1) &= 3 \\T(n) &= 3 \cdot T(n-1) - 2 \cdot T(n-2) \quad \text{für alle } n \geq 2\end{aligned}$$

(b) Lösen Sie die folgende Rekursionsgleichung. Sie können davon ausgehen, daß n eine Zweierpotenz ist.

$$\begin{aligned}T(1) &= c && (c > 0) \\T(n) &= 5 \cdot T(n/2) + n^2\end{aligned}$$

Aufgabe 7

(5 Punkte)

Sei $S(A)$ ein beliebiger Algorithmus, der ein gegebenes Feld A aufsteigend sortiert. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus, der ein gegebenes Feld $A[1..n]$ aufsteigend sortiert:

```
boolean sortiert=true;

for(i=1;i<n;i=i+1)
    if (A[i]>A[i+1]) {
        sortiert=false;
        break;
    }

if(sortiert==false)
    S(A);
```

Sei T der Entscheidungsbaum von S für $n = 5$. Zeichnen Sie den Entscheidungsbaum von obigem Algorithmus für $n = 5$ unter Verwendung von T .