

Klausur Theorie der Programmiersprachen WS 2010/11

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Die aussagenlogische Formel F auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das zeigt der angegebene Backtrackingbaum (Baum der Davis-Putnam Prozedur.)

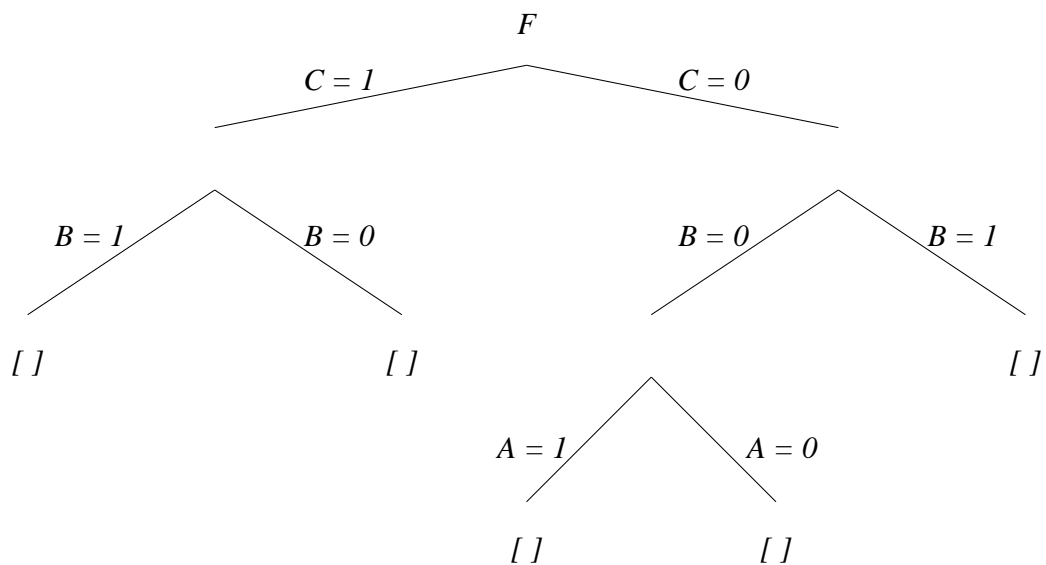
Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis.

Schreiben Sie dazu an jeden Knoten des Baumes die zugehörige Klausel dieses Resolutionsbeweises!

Die Formel F besteht aus den Klauseln:

$$A \vee C \quad \text{und} \quad \neg A \vee C \quad \text{und} \\ \neg B \vee \neg C \quad \text{und} \quad \neg B \vee C \quad \text{und} \quad B \vee \neg C.$$

Backtrackingbaum:



Aufgabe 2

(2+4+5=11 Punkte)

- (a) Ergänzen Sie den Halbsatz auf dem Lösungsblatt zum Endlichkeitssatz der Aussagenlogik!

Eine unendliche Menge aussagenlogischer Formeln ist **unerfüllbar** genau dann, wenn ...

- (b) Wir betrachten Erfüllbarkeitsproblem für 2-KNF.

Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus an, der dieses Problem auf Basis der *Resolution* löst. Begründen Sie, warum ihr Algorithmus in Polynomialzeit läuft.

Hinweis: Wieviele verschiedene Klauseln sind möglich?

- (c) Transformieren Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem Linearzeitverfahren der Vorlesung in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in 3-KNF.

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg B \rightarrow (A \vee C))$$

Aufgabe 3

(4+3+2+2+4=15 Punkte)

- (a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine äquivalente bereinigte Formel in Pränexform.

$$\left(\forall x \exists y \left((P(x, y) \rightarrow R(g(x))) \wedge P(x, y) \right) \right) \wedge \neg \left((\forall x R(x)) \rightarrow (\forall y Q(f(y))) \right)$$

- (b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in Skolemform.
- (c) Geben Sie drei Terme aus dem Herbrand Universum der Formel aus (b) an.
- (d) Geben Sie die kleinste Formel der Herbrand Expansion der Formel aus (b) an.
- (e) Stellen Sie die Formel aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen A, B, C, \dots dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

Aufgabe 4

(3+5=8 Punkte)

- (a) Welche der beiden folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie ihre Antwort.

„Das *Allgemeingültigkeitsproblem* der Prädikatenlogik ist ...“

- (i) semi-entscheidbar
- (ii) nicht semi-entscheidbar

- (b) Wir betrachten die Reduktion des *Post'schen Korrespondenzproblems* auf das *Allgemeingültigkeitsproblem* der Prädikatenlogik.

Geben Sie zu dem Post'schen Korrespondenzproblem auf dem Lösungsblatt die prädikatenlogische Formel an, die sich aus der Reduktion aus der Vorlesung ergibt.

$$\text{Post'sches Korrespondenzproblem} = \left\{ \begin{array}{l} (0, 011) \\ (11, 1) \end{array} \right\}$$

Aufgabe 5

(8 Punkte)

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an.

$$\left\{ P(f(x)), \neg Q(z), P(z) \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \neg P(f(x)), \neg P(x) \right\}$$

Dabei sind x und z Variablen.

Aufgabe 6 (10(=4+4+2)+6=16 Punkte)

Wir betrachten das Hornklauselprogramm auf dem Lösungsblatt.

$$M(0,0)$$
$$M(S(x), S(S(y))) \leftarrow M(x, y)$$

- M ist ein zweistelliges *Relationssymbol*
 - 0 eine *Konstante*
 - S ist ein einstelliges *Funktionssymbol*
 - x, y sind *Variablen*
- (a) Wir betrachten die folgende Interpretation:
- Grundmenge sind die natürlichen Zahlen
 - 0 ist die *Null*
 - S ist die Addition mit 1 .
- (i) Lassen wir das Programm mit Zielklausel $M(2, z)$ laufen, so wird eine prädikatenlogische Formel als unerfüllbar nachgewiesen. Dabei ist $2 = S(S(0))$, z eine Variable.
Geben Sie diese Formel in KNF an, inklusive aller Quantoren.
- (ii) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel $M(2, z)$ vor.
Geben Sie die Unifikatoren an und vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!
- (iii) Geben Sie das Ergebnis an, das bei Eingabe der Zielklausel $M(a, z)$, a eine natürliche Zahl, z eine Variable, in z berechnet wird.

(b) Wir betrachten eine andere Interpretation:

- Die Grundmenge ist unverändert die Menge der natürlichen Zahlen.
- M ist folgendermaßen interpretiert:
 $M(a, b)$ ist wahr genau dann, wenn $a \leq b$ ist.
- Der Rest ist unverändert.

Ihre in Teil (a)(i) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrieren Sie das durch „Hochgehen“ in dem Beweis aus Teil (a)(ii).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel auch in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.