Übung 2

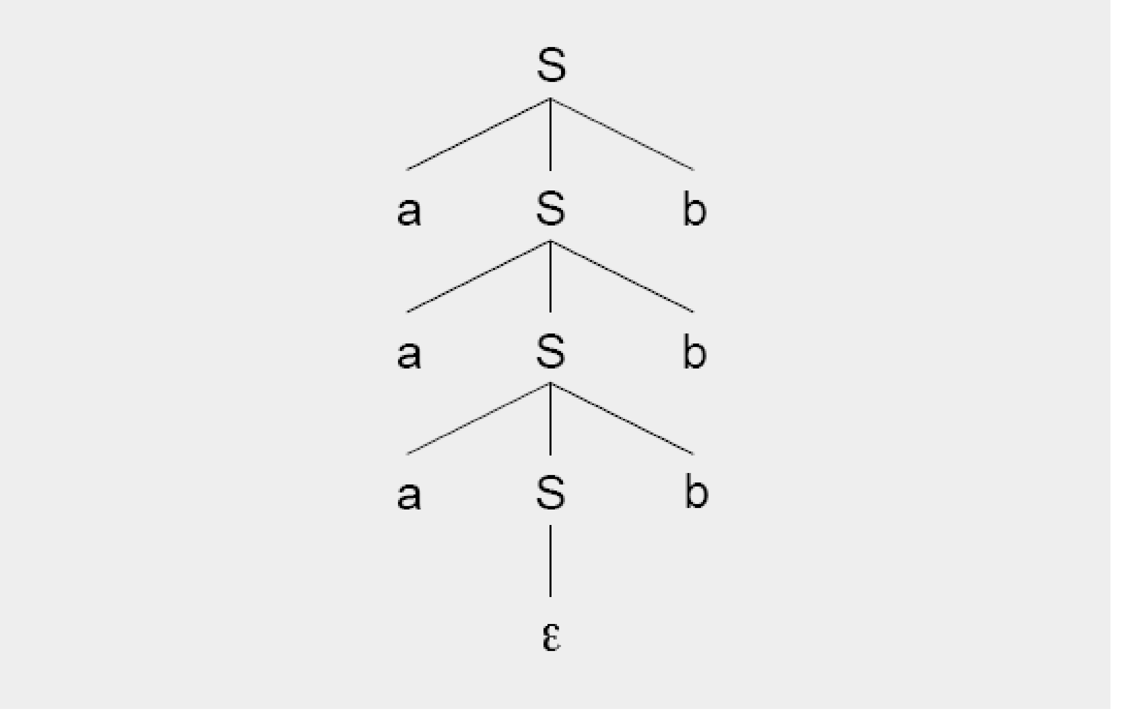
29.11.2011

Aufgabe 7 – kontextfreie Grammatiken

Beispiel 6.5: Das Standardbeispiel einer Typ-2-Sprache ist $L_2 = \{a^n b^n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. die Menge aller Wörter, die aus n Symbolen a gefolgt von gleich vielen Symbolen b bestehen. Es lässt sich leicht demonstrieren, dass eine reguläre Grammatik nicht ausreicht, um L_2 zu beschreiben. Eine kontextfreie Grammatik G_2, die L_2 erzeugt, ist $G_2 = (V_N, V_T, P, S)$ mit $V_T = \{a, b\}$ und $P = \{S \to aSb,\ S \to \varepsilon\}$. Beispielsweise entsteht das Wort $aaabbb$ durch die Ableitungsfolge

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb\,.$$

Aufgabe 7



Aufgabe 8

Die Form der Regeln kontextfreier Grammatiken zeigt, dass einseitig-lineare Grammatiken auch kontextfrei sind. Dies legt natürlich die Vermutung nahe, dass die regulären Sprachen eine echte Teilmenge der kontextfreien Sprachen sind. Die höhere Ausdrucksmächtigkeit kontextfreier Sprachen gegenüber regulären Sprachen zeigt sich insbesondere durch die Möglichkeit, Klammerstrukturen zu beschreiben. So wird die Sprache $L = \{a^i b a^i \mid i \geq 0\}$ von der kontextfreien Grammatik $G = \langle \{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow b, S \rightarrow aSa\}, S \rangle$ erzeugt. Eine einseitig-lineare Grammatik lässt sich für diese Sprache nicht formulieren.

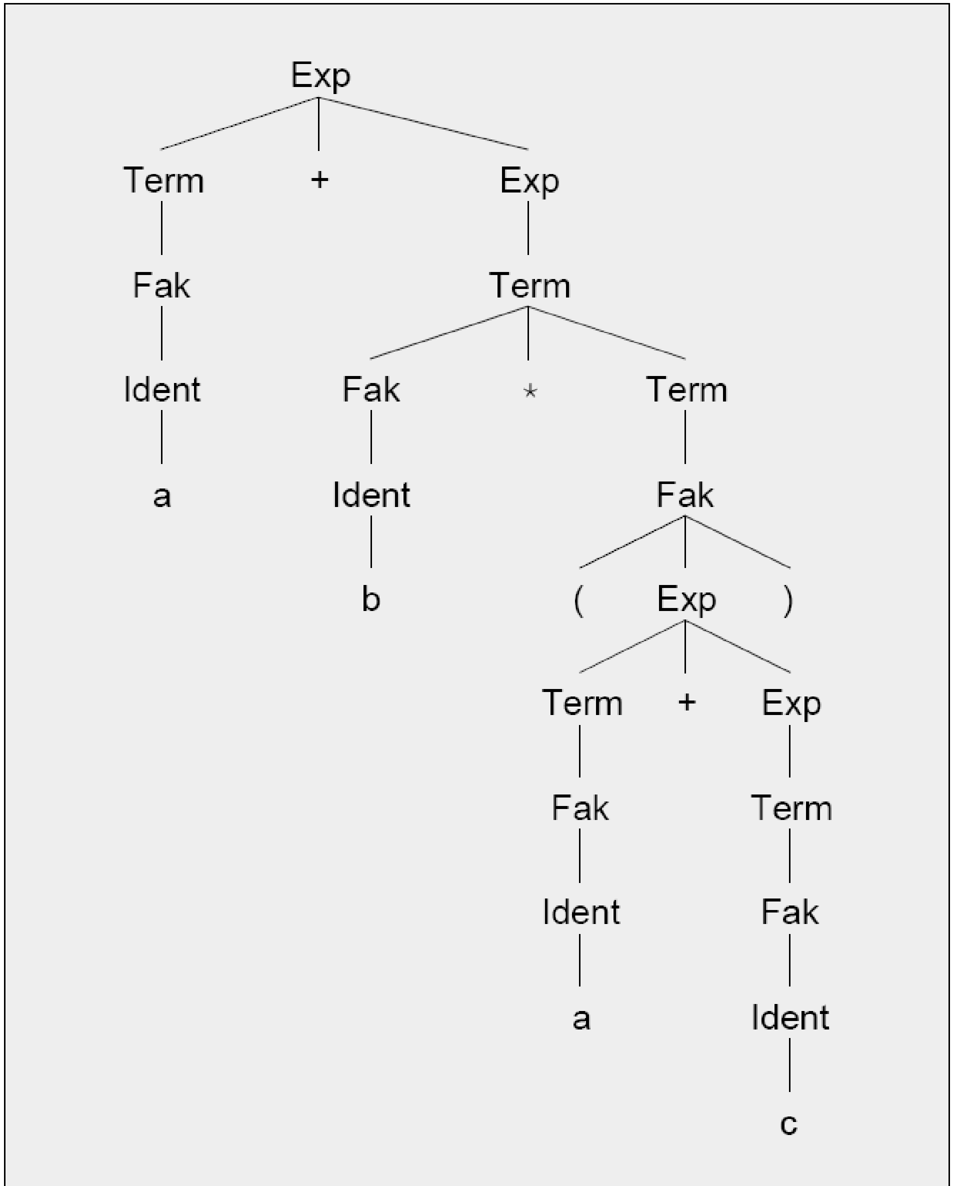
Kontextfreie Sprachen lassen zwar Klammerstrukturen zu, nicht aber beliebig viele Verkettungen verschiedener Zeichen mit gleicher Anzahl. So ist insbesondere die Sprache $L = \{a^i b^i a^i \mid i > 0\}$ nicht kontextfrei.

Aufgabe 9

Beispiel 6.6: Gegeben ist die Grammatik $G_M = (V_N, V_T, P, S)$ zur Erzeugung einfacher mathematischer Ausdrücke, mit

$$
\begin{aligned}
V_N &= \{Exp, Term, Fak, Ident\} \\
V_T &= V_M \cup V_I = \{+, *, (,)\} \cup \{a, b, c\} \\
P &= \{\ Exp \rightarrow Term \mid Term + Exp, \\
&\qquad Term \rightarrow Fak \mid Fak * Term, \\
&\qquad Fak \rightarrow Ident \mid (Exp), \\
&\qquad Ident \rightarrow a \mid b \mid c\ \} \\
S &= Exp.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9 – Ableitungsbaum



$$a+b*(a+c)$$

Aufgabe 10 – kontextsensitive Grammatiken

Sprache: $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$

$$S \rightarrow ABC$$
$$S \rightarrow SABC$$

$$BA \rightarrow AB$$
$$CB \rightarrow BC$$
$$CA \rightarrow AC$$

$$AB \rightarrow ab$$
$$BC \rightarrow bc$$
$$Aa \rightarrow aa$$
$$bB \rightarrow bb$$
$$cC \rightarrow cc$$

Ableitung des Worts *aaabbbccc*

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow SABC \\
&\Rightarrow SABCABC \\
&\Rightarrow ABCABCABC \\
&\Rightarrow ABACBCABC \\
&\Rightarrow AABCBCABC \\
&\Rightarrow AABBCCABC \\
&\Rightarrow AABBCACBC \\
&\Rightarrow AABBACCBC \\
&\Rightarrow AABABCCBC \\
&\Rightarrow AAABBCCBC \\
&\Rightarrow AAABBCBCC \\
&\Rightarrow AAABBBCCC \\
&\Rightarrow AAabBBCCC \\
&\Rightarrow AAabBbcCC \\
&\Rightarrow AaabBbcCC \\
&\Rightarrow aaabBbcCC \\
&\Rightarrow aaabbbcCC \\
&\Rightarrow aaabbbccC \\
&\Rightarrow aaabbbccc
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 – andere Regelmenge

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aBC \\ S & \rightarrow & aSBC \\ CB & \rightarrow & BC \\ aB & \rightarrow & ab \\ bB & \rightarrow & bb \\ bC & \rightarrow & bc \\ cC & \rightarrow & cc \end{array}$$

Aufgabe 11 – Typ 0

Sprache: $L = \left\{ a^{2^n} : n \geq 1 \right\}$

$S \longrightarrow SD$

$S \longrightarrow La$

$aD \longrightarrow Daa$

$LD \longrightarrow L$

$L \longrightarrow \epsilon$

Ableitung des Worts a^{2^4}:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow SD \\
&\Rightarrow SDD \\
&\Rightarrow SDDD \\
&\Rightarrow SDDDD \\
&\Rightarrow LaDDDD \\
&\Rightarrow LDaaDDD \\
&\Rightarrow LaaDDD \\
&\Rightarrow LaDaaDD \\
&\Rightarrow LDaaaaDD \\
&\Rightarrow LaaaaDD \\
&\Rightarrow LaaaDaaD \\
&\Rightarrow LaaDaaaaD \\
&\Rightarrow LaDaaaaaaD \\
&\Rightarrow LDaaaaaaaaD \\
&\Rightarrow LaaaaaaaaD \\
&\Rightarrow LaaaaaaaDaa \\
&\Rightarrow LaaaaaaDaaaa \\
&\Rightarrow LaaaaaDaaaaaa \\
&\Rightarrow LaaaaDaaaaaaaa \\
&\Rightarrow LaaaDaaaaaaaaaa \\
&\Rightarrow LaaDaaaaaaaaaaaa \\
&\Rightarrow LaDaaaaaaaaaaaaaa \\
&\Rightarrow LDaaaaaaaaaaaaaaaa \\
&\Rightarrow Laaaaaaaaaaaaaaaa \\
&\Rightarrow aaaaaaaaaaaaaaaa
\end{aligned}
$$