8 Zeitliches Schließen

Allens Temporallogik

8.1 Einführung

Einführung

- Aufgaben
  - Modellierung zeitlicher Beziehungen zwischen bestimmten Ereignissen
  - Berechnung unbekannter zeitlicher Beziehungen (oft sind nicht alle bekannt oder nur implizit vorhanden)
  - Aufdecken von Widersprüchen (Inkonsistenzen)
- Zeitlogik von Allen (1983)
- Dabei wird die Propagierung von zeitlichen Constraints als Schlussfolgerungsverfahren benutzt.

8.2 Intervalle und Basisrelationen

Beispiel – Hausbau – Ereignisse

- M – Hausbemusterungsphase
- MU – Unterschrift zur Bemusterung
- B – Bauphase
- BA – Bauabnahme
- A – Bauantragsphase
- E – Erschließungsphase

Temporale Beziehungen

- MU beendet M
- MU nach A
- B nach M
- E vor BA
- BA beendet B

Frage: Ist M zeitgleich E möglich ?

Zeitintervall

Zur Modellierung zeitlichen Wissens kann man sowohl Zeitpunkte als auch Zeitintervalle verwenden. In Allens Ansatz gibt es nur Zeitintervalle. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da auch scheinbar punktförmige Ereignisse (z.B. MU eine kleine zeitliche Ausdehnung haben).

Zeitintervall:

$$X = (X^-, X^+), \quad X^- < X^+, \quad X^-, X^+ \in R$$

Bezeichnung: $X, Y, \ldots$

Relationen

Absolute Zeitwerte lassen sich in dieser Logik nicht repräsentieren, sondern nur die relative Lage von Zeitintervallen zueinander.

Beispiel: $X = (30,35)$ $Y = (15,35)$

$$\boxed{X \text{ beendet } Y}$$

X beginnt später als Y , beide enden jedoch zum gleichen Zeitpunkt.

$$X = (X^-, X^+)$$

$$Y = (Y^-, Y^+)$$

$$Y^- < X^- \qquad Y^+ = X^+$$

13 – Basisrelationen

$$X = (X^-, X^+) \qquad Y = (Y^-, Y^+)$$

X vor Y	$X < Y$	$X^- < X^+ < Y^- < Y^+$
X trifft Y	$X\ m\ Y$	$X^- < X^+ = Y^- < Y^+$
X überlappt Y	$X\ o\ Y$	$X^- < Y^- < X^+ < Y^+$
X startet Y	$X\ s\ Y$	$X^- = Y^- < X^+ < Y^+$
X innerhalb Y	$X\ d\ Y$	$Y^- < X^- < X^+ < Y^+$
X beendet Y	$X\ f\ Y$	$Y^- < X^- < X^+ = Y^+$
X gleich Y	$X \equiv Y$	$Y^- = X^- < X^+ = Y^+$

Basisrelationen

$X < Y$

$X \; m \; Y$

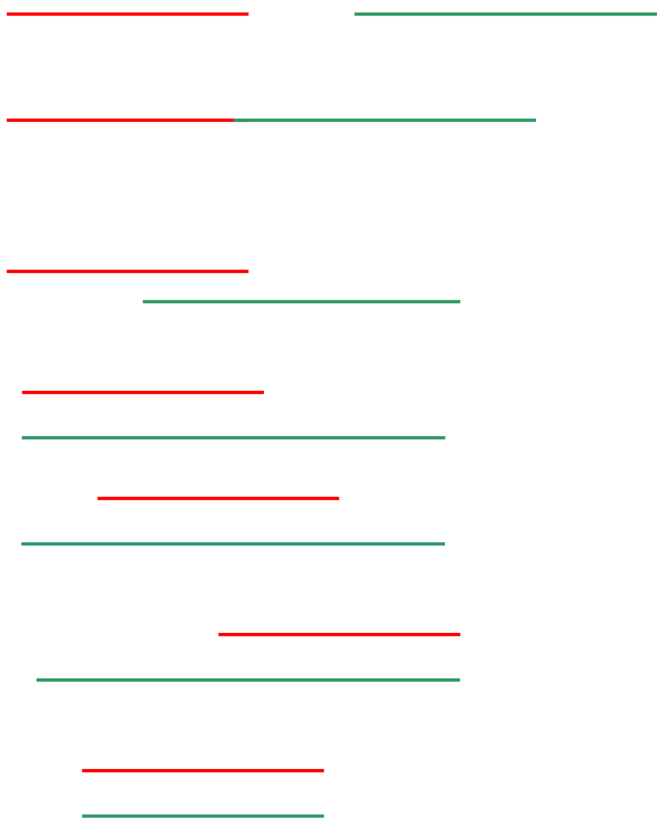
$X \; o \; Y$

$X \; s \; Y$

$X \; d \; Y$

$X \; f \; Y$

$X \equiv Y$



Basisrelationen – inverse

$$b \in \{<, m, o, s, d, f, \equiv\}$$

$$\boxed{X\ b^i\ Y \leftrightarrow Y\ b\ X}$$

Inverse Relation zu b $\quad <^i = > \quad \equiv^i = \equiv$

Damit erhalten wir (2 x 7) - 1 = 13 Basisrelationen.

Beispiel

- M – Hausbemusterungsphase
- MU – Unterschrift zur Bemusterung
- B – Bauphase
- BA – Bauabnahme
- A – Bauantragsphase
- E – Erschließungsphase

- MU beendet M
- MU nach A
- B nach M
- E vor BA
- BA beendet B

$$
\begin{array}{ccc}
MU & f & M \\
MU & > & A \\
B & > & M \\
E & < & BA \\
BA & f & B
\end{array}
$$

Die Relation $M \equiv E$ *ist möglich, falls*

$$
\begin{array}{rcl}
A & = & (0,2) \\
M & = & (1,4) \\
MU & = & (3,4) \\
B & = & (5,9) \\
BA & = & (8,9) \\
E & = & (1,4)
\end{array}
$$

8.3 Allgemeine Zeitrelationen

Allgemeine Zeitrelationen

Unvollständige Information kann durch Mengen von Basisrelationen dargestellt werden.

$X\ \{\equiv, d\}\ Y$ X gleich Y oder X innerhalb von Y

$X\ \{s, d, f\}\ Y$ X während Y

$$B = \{<, >, m, m^i, o, o^i, s, s^i, d, d^i, f, f^i, \equiv\}$$

$X\ B\ Y$ vollständige Unwissenheit über die zeitliche Beziehung zwischen X und Y

$$X\ b\ Y \leftrightarrow X\ \{b\}\ Y$$

Inverse Relation

$$B = \left\{<, >, m, m^i, o, o^i, s, s^i, d, d^i, f, f^i, \equiv\right\}$$

$$R \subseteq B \longrightarrow R^i = \left\{b^i : b \in R\right\}$$

Beispiel: $\{d, s\}^i = \{d^i, s^i\}$

$$R, S \subseteq B \qquad X\ (R \cap S)\ Y \leftrightarrow X\ R\ Y \wedge X\ S\ Y$$

$$X\ R^i\ Y \leftrightarrow Y\ R\ X$$

8.4 Komposition von Relationen

Komposition von Basisrelationen

$$b_1, b_2 \in B$$

$$\boxed{X\ (b_1 \circ b_2)\ Z \leftrightarrow \exists Y (X\ b_1\ Y \wedge Y\ b_2\ Z)}$$

Beispiel

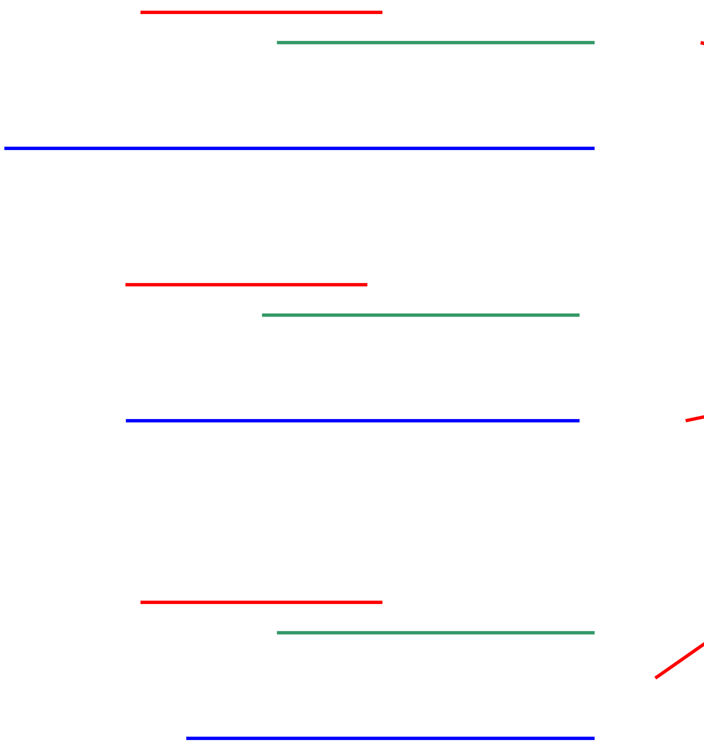
$$X\ (f \circ <)\ Z \qquad \exists Y(X\ \ f\ Y \wedge Y < Z)$$

$$\Rightarrow \quad X < Z$$

$$\boxed{(f \circ <) = <}$$

Beispiel

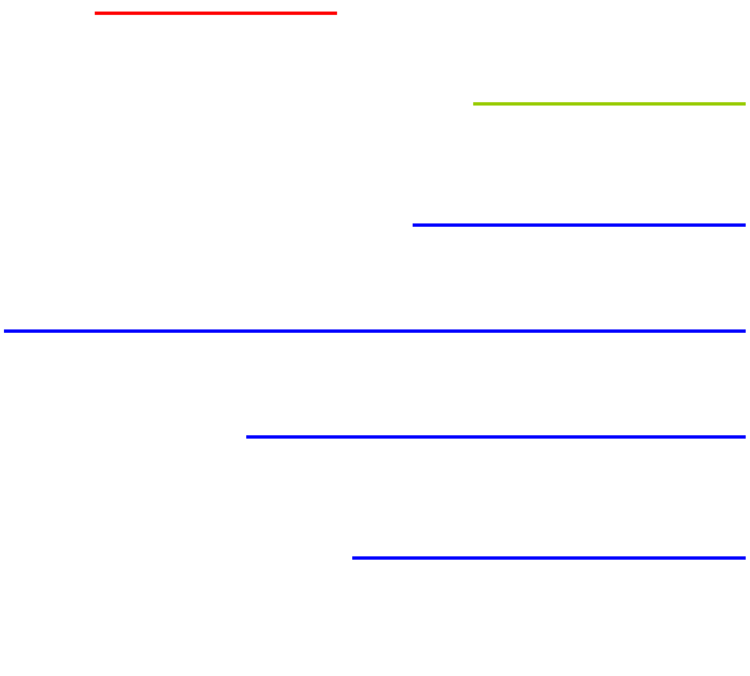
$X\ (o \circ f)\ Z \qquad \exists Y (X\ o\ Y \wedge Y\ f\ Z)$



$$\boxed{(o \circ f) = \{o, s, d\}}$$

Beispiel

$$X\ (< \circ f)\ Z \qquad \exists Y (X < Y \wedge Y\ f\ Z)$$



$$\boxed{(< \circ f) = \{<, d, o, m, s\}}$$

Beispiel

$X \ (< \circ >) \ Z$ $\qquad \exists Y (X < Y \wedge Y > Z)$

$$\boxed{(< \circ >) = B}$$

$$\boxed{(> \circ <) = B}$$

Eigenschaften

$$b = (b \circ \equiv) = (\equiv \circ\, b), \quad \forall b \in B$$

$$\{\equiv\} \subseteq (b_1 \circ b_2) \leftrightarrow b_2 = b_1^i$$

Komposition für beliebige Relationen

$$R_1, R_2 \subseteq B$$

$$\boxed{R_1 \circ R_2 = \{b_1 \circ b_2 : b_1 \in R_1, b_2 \in R_2\}}$$

Beispiel

$R_1 = \{<, m\}$ $\qquad$ $R_2 = \{s\}$

$(< \circ\, s) = <$ $\qquad$ $(m \circ s) = m$

$\Rightarrow$ $\qquad$ $R_1 \circ R_2 = \{<, m\}$

Eigenschaft

$R_1, R_2 \subseteq B$

$$\boxed{(R_1 \circ R_2)^i = (R_2)^i \circ (R_1)^i}$$

8.5 Constraintpropagierung in temporalen Constraintnetzen

Intervallkonfiguration

Eine Intervallkonfiguration $X_1, X_2, \ldots, X_n$

kann als Matrix $M = (m_{ij}), \quad i, j = 1, \ldots, n$

modelliert werden.

$m_{ij} \subseteq B$ beschreiben die Beschränkung (Relation) zwischen den Zeitintervallen X_i und X_j

$m_{ii} = \{\equiv\}$ $\qquad m_{ij} = (m_{ji})^i$

Beispiel

$$
\begin{array}{ccc}
MU & f & M \\
MU & > & A \\
B & > & M \\
E & < & BA \\
BA & f & B
\end{array}
$$

	M	MU	B	BA	A	E
M	$\equiv$	f^i	$<$	B	B	B
MU	f	$\equiv$	B	B	$>$	B
B	$>$	B	$\equiv$	f^i	B	B
BA	B	B	f	$\equiv$	B	$>$
A	B	$<$	B	B	$\equiv$	B
E	B	B	B	$<$	B	$\equiv$

Constraintproblem

Es geht nun darum, die Wertemengen für die Variablen m_{ij} einzuschränken. Zwischen diesen Variablen bestehen die Relationen

$$m_{ik} \circ m_{kj} = m_{ij}, \quad \forall i, j, k = 1, \ldots, n$$

Wir haben also ein Constraintproblem vorliegen. Die Neuberechnung (Einschränkung) von m_{ij} geschieht mit der Iteration

$$\boxed{m_{ij} := m_{ij} \cap (m_{ik} \circ m_{kj})}$$

solange bis die Matrix M sich nicht mehr verändert.

Beispiel

	M	MU	B	BA	A	E
M	$\equiv$	f^i	$<$	B	B	B
MU	f	$\equiv$	B	B	$>$	B
B	$>$	B	$\equiv$	f^i	B	B
BA	B	B	f	$\equiv$	B	$>$
A	B	$<$	B	B	$\equiv$	B
E	B	B	B	$<$	B	$\equiv$

$$m_{63} = m_{63} \cap (m_{64} \circ m_{43}) = B \cap (< \circ\ f)$$

$$m_{63} = B \cap \{<, d, o, m, s\} = \{<, d, o, m, s\} = K$$

Constraintproblem

Gilt für ein Element der Ergebnismatrix

$$m_{ij} = \varnothing$$

so widersprechen sich die Zeitintervalle.

Sind dagegen alle Einträge der Ergebnismatrix nicht leer, so wird diese Matrix auch als **pfadkonsistent** bezeichnet.

Beispiel

G – Grundstudium

H – Hauptstudium

V – Vordiplom

P – Praxissemester

$$G\ m\ H$$

$$G\ f^{i}\ V$$

$$P\ d\ H$$

$$V > P$$

$$f^{i} \circ > = \{>, o^{i}, m^{i}, d^{i}, s^{i}\}$$

$$G\ f^{i}\ V \qquad V > P$$

$$\Rightarrow \quad G\ \{>, o^{i}, m^{i}, d^{i}, s^{i}\}\ P$$

Beispiel

$$\{>, o^i, m^i, d^i, s^i\} \circ d = \{>, m^i, o, o^i, \equiv, d, d^i, f, f^i, s, s^i\}$$

$$G\,\{>, o^i, m^i, d^i, s^i\}\,P \qquad\qquad P\;d\;H$$

$$\Rightarrow \qquad G\,\{>, m^i, o, o^i, \equiv, d, d^i, f, f^i, s, s^i\}\,H$$

$$G\;m\;H \quad \Rightarrow \quad \{>, m^i, o, o^i, \equiv, d, d^i, f, f^i, s, s^i\} \cap \{m\} = \emptyset$$

Widerspruch, Zwischen G und H gibt es keine Zeitrelation.

Algorithmus

Eingabe: M

Ausgabe: true (M pfadkonsistent) oder false (M nicht erfüllbar)

Initialisierung:

Matrixelemente von M mit den gegebenen Zeitrelationen,
sonst gleich B (noch keine Information)

$$A = \{(i,j) : i,j = 1, \cdots, n\}, i \neq j$$

Algorithmus

while $(A \neq \emptyset)$

(i, j) – erstes Element von A

löschee (i, j) aus A

for $k := 1$ to n

$m := m_{ik} \cap (m_{ij} \circ m_{jk})$

if $m \neq m_{ik}$ then

if $m = \emptyset$ then return false

$m_{ik} := m$

$m_{ki} := m^{i}$

$A := A \cup \{(i, k), (k, i)\}$

return true

Beispiel

	M	MU	B	BA	A	E
M	$\equiv$	f^i	$<$	B	B	B
MU	f	$\equiv$	B	B	$>$	B
B	$>$	B	$\equiv$	f^i	B	B
BA	B	B	f	$\equiv$	B	$>$
A	B	$<$	B	B	$\equiv$	B
E	B	B	B	$<$	B	$\equiv$

	M	MU	B	BA	A	E
M	$\equiv$	f^i	$<$	$<$	K^i	B
MU	f	$\equiv$	$<$	$<$	$>$	B
B	$>$	$>$	$\equiv$	f^i	$>$	K^i
BA	$>$	$>$	f	$\equiv$	$>$	$>$
A	K	$<$	$<$	$<$	$\equiv$	B
E	B	B	K	$<$	B	$\equiv$

$$K = \{<, d, o, m, s\}$$

Aus dieser Tabelle lässt sich auch die Frage beantworten, ob $m_{16} = \equiv$ möglich ist. Dies folgt aus $m_{16} = B$. Es gibt keine Einschränkungen zwischen den Ereignissen M und E.

Eigenschaften des Algorithmus

- terminiert – bei beliebiger Eingabe
- Laufzeit $O(n^3)$
- korrekt – falls return false, dann Widerspruch
- nicht vollständig – eine pfadkonsistente Matrix kann trotzdem widersprüchlich sein (führt in der Praxis nur selten zu Problemen)

Beispiel

	A	B	C	D
A	$\equiv$	$\{d, d^i\}$	$\{f, f^i\}$	$\{s^i, m^i\}$
B	$\{d, d^i\}$	$\equiv$	$\{d, d^i\}$	$\{o^i\}$
C	$\{f, f^i\}$	$\{d, d^i\}$	$\equiv$	$\{s^i, m^i\}$
D	$\{s, m\}$	$\{o\}$	$\{s, m\}$	$\equiv$

Diese Matrix ist pfadkonsistent aber nicht erfüllbar.

Beweis

$$A \; f \; C$$

$$A \; f^{\,i} \; C \;\; (C \; f \; A)$$

$$\Rightarrow \quad A^{+} = C^{+} \;\; \text{und} \;\; A^{-} \neq C^{-}$$

4 Fälle: $D \, s \, A \;\; \text{und} \;\; D \, s \, C$

$$\Rightarrow \quad A^{-} = C^{-}$$

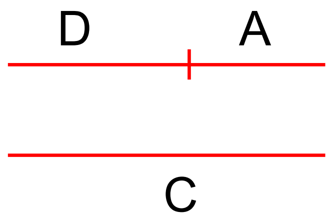
Widerspruch

$$D \, m \, A \;\; \text{und} \;\; D \, m \, C$$

$$\Rightarrow \quad A^{-} = C^{-}$$

Widerspruch

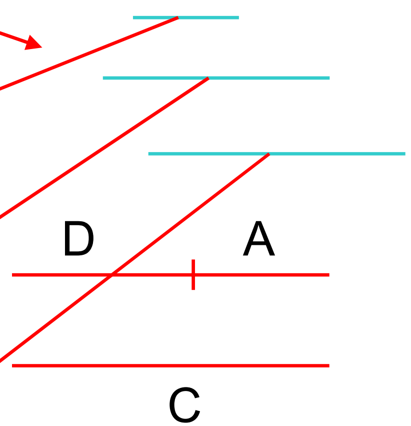
Beweis



$$D\,m\,A \text{ und } D\,s\,C$$

$$\Rightarrow \quad C^- = D^- < D^+ = A^- < A^+ = C^+$$

$D\,o\,B$ 3 Möglichkeiten für B



$B^+ < A^+$		$A\{d, d^i\}\,B$
$B^+ = A^+$	Widerspruch zu	$A\{d, d^i\}\,B$
$B^+ > A^+$		$C\{d, d^i\}\,B$

Beweis

$$D\, s\, A \;\text{ und }\; D\, m\, C$$

Durch Vertauschen der Rollen von A und C erhält man Fall 3.