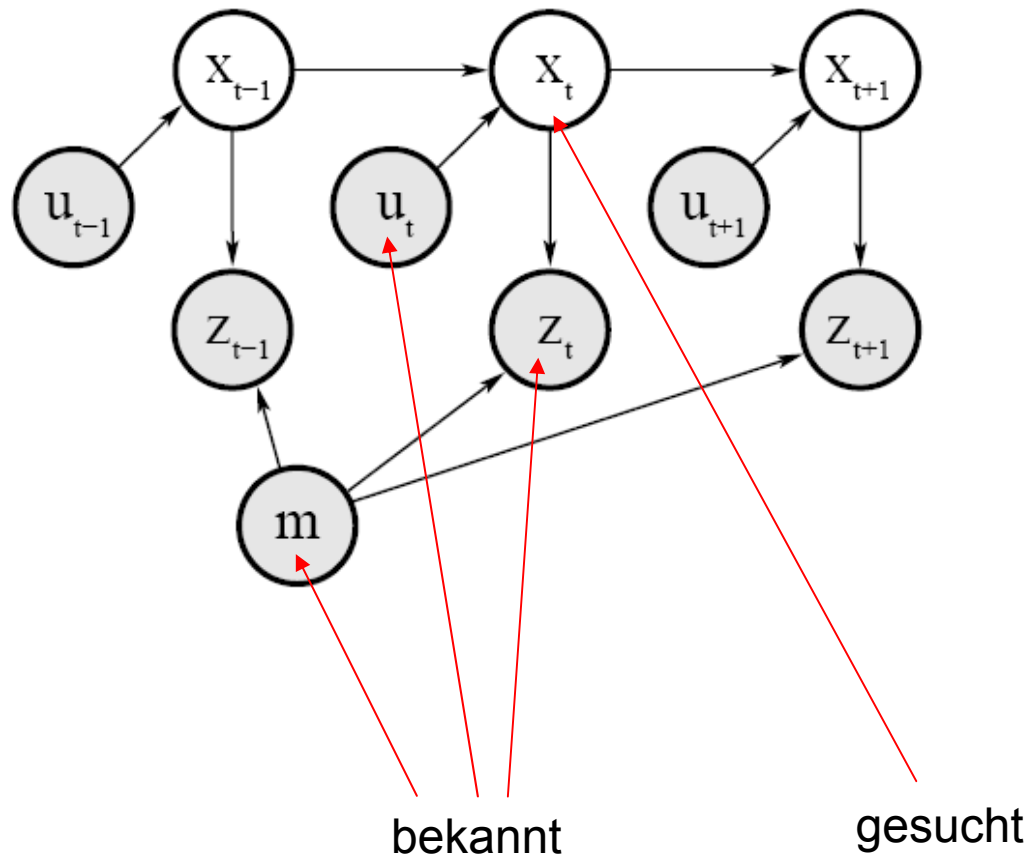


# 8 Selbstlokalisierung

# Selbstlokalisierung

- Position des Roboters innerhalb der Umgebungskarte
- aufgrund von Sensordaten und Navigationsaktionen

# Selbstlokalisierung



# Arten

- lokal
  - Ausgangsposition (ungefähr) bekannt
  - Berechnung einer neuen Position nach Ausführung von Navigationsaktionen mit Hilfe von Sensordaten
- global
  - Ausgangsposition unbekannt
- kidnapped robot problem
  - robust gegen Versetzen des Roboters

# Selbstlokalisierung

- Koppelnavigation
- Scanmatching
- (Lokalisation in GVG)
- Markov – Lokalisation
  - Bayes
  - Kalman
- Monte Carlo – Lokalisation
  - verwendet eine endliche Anzahl von gewichteten Partikeln

# 8.1 Koppelnavigation

# Koppelnavigation

- Positionsänderung eines Roboters wird durch Messen des zurückgelegten Weges eines oder mehrerer Räder bestimmt
- Odometrie

# Berechnung

$$\mathbf{x}_t = (x, y, \theta)^T$$

Ausgangsposition

$$\mathbf{s}_t = (\delta, \alpha)^T$$

Sensorinformation

zurückgelegter (geradliniger) Weg

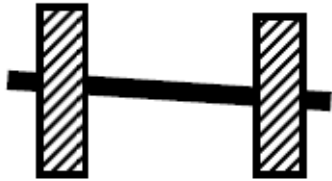
Änderung der Orientierung

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} x + \delta \cdot \cos \theta \\ y + \delta \cdot \sin \theta \\ \theta + \alpha \end{pmatrix}$$

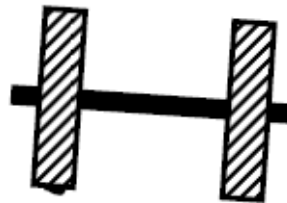
neue Position

# Probleme

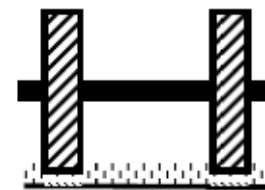
- Fehler in der Odometrie
- Driftbewegungen
- Bei längeren Wegstrecken nehmen die Meßfehler zu



Unterschiedliche  
Raddurchmesser



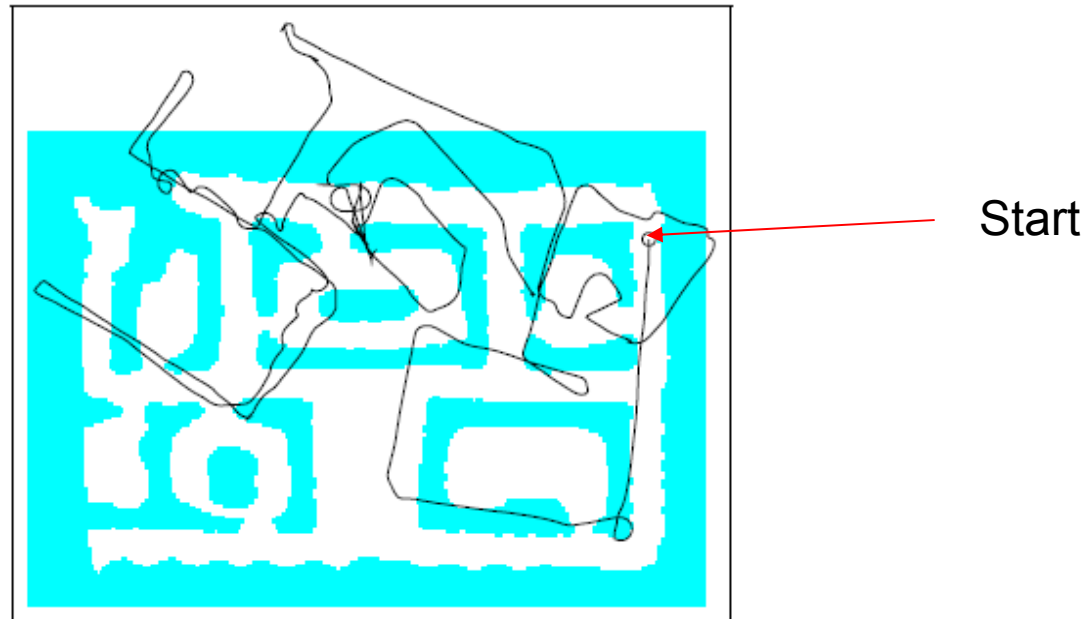
Unebenheiten



Untergrund

# Beispiel – Odometriesensoren

- Startpunkt – rechte obere Ecke
- 240 m langer Pfad
- nach wenigen Metern nutzlos



## 8.2 Scanmatching

# Scanmatching

- Ein Scan wird so verdreht oder verschoben, dass eine Überdeckung mit einem Referenzmodell zustande kommt.
- benötigt initiale Positionsangabe
- Vorverarbeitungsschritte – Extrahieren von Merkmalen
  - Liniensegmente
  - Ecken
- Überdeckung
  - Cox – Algorithmus (Linienmodell)
  - IDC – Algorithmus (reale Scannerdaten)

## 8.3 Markov – Lokalisation

# Markov Lokalisation

- probabilistische Beschreibung
- schätzt die globale Position eines Roboters anhand
  - Eigenbewegung (Aktionen)
  - Sensorbeobachtungen (z.B. Abstand zu Objekten in der Umgebung)

# Algorithmus (Bayes – Filter)

Eingabe:  $\text{bel}(x_{t-1}), u_t, z_t, m$

for all  $x_t$  do

$$\overline{\text{bel}}(x_t) = \sum_{x_{t-1}} p(x_t | x_{t-1}, u_t, m) \text{bel}(x_{t-1})$$

$$\text{bel}(x_t) = \eta \cdot p(z_t | x_t, m) \cdot \overline{\text{bel}}(x_t)$$

Ausgabe:  $\text{bel}(x_t)$



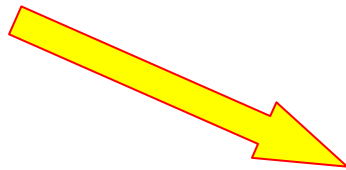
müssen bekannt sein

# Initialisierung – lokal

$$\text{bel}(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 = \bar{a}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bekannte Ausgangsposition

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\det(\Sigma_0)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_0 - \bar{x}_0)^T \cdot \Sigma_0^{-1} \cdot (x_0 - \bar{x}_0)}$$



$\text{bel}(x_0)$

# Initialisierung – global

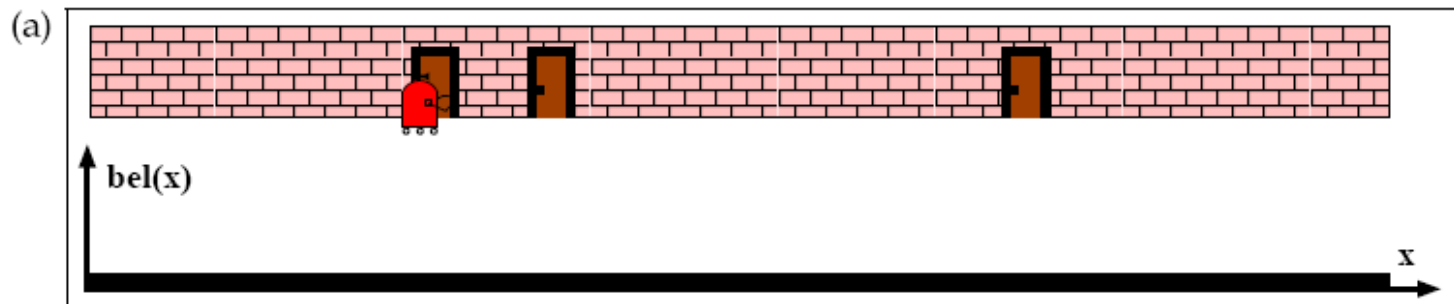
$$\text{bel}(x_0) = \frac{1}{|X|}$$

Anzahl aller möglichen Positionen



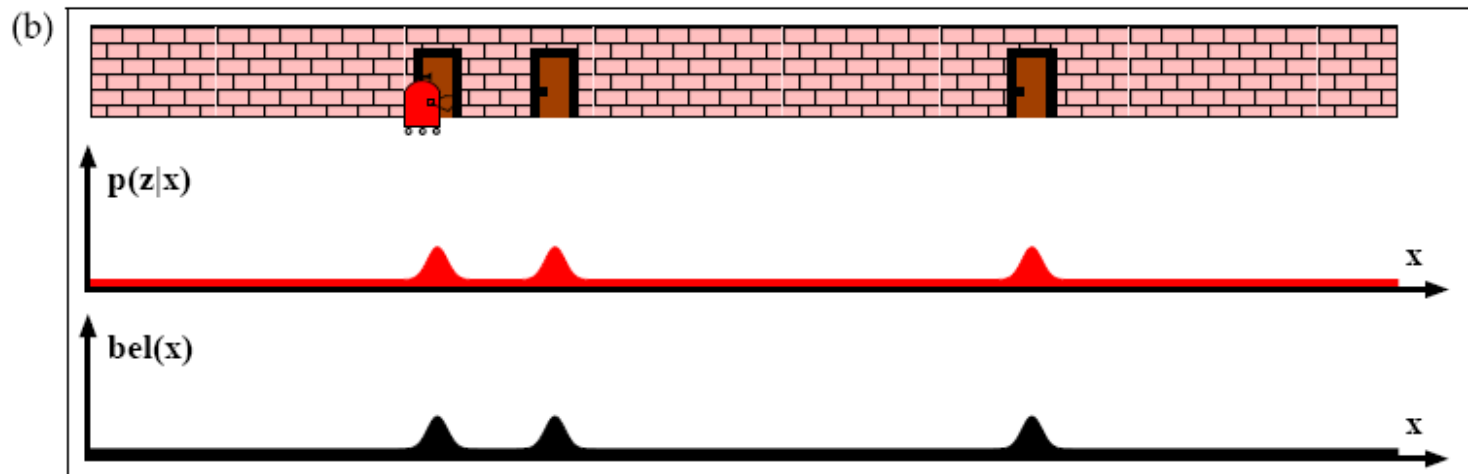
# Beispiel (a)

- Eindimensional (globale Selbstlokalisierung)
- Roboter bewegt sich entlang des Korridors und kann dabei nicht rotieren
- der Roboter hat zu Beginn keinerlei Vorwissen über seine Position
- Zustand der Unwissenheit wird durch eine Gleichverteilung realisiert



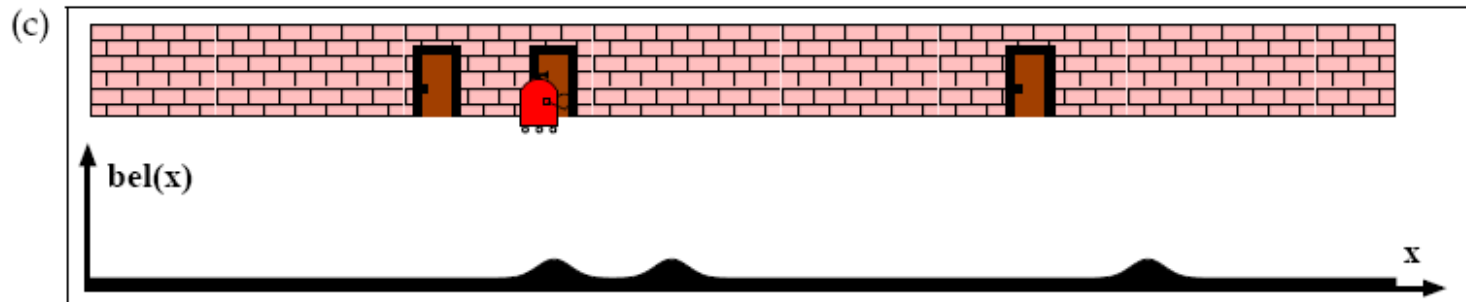
# Beispiel (b)

- Sensor sieht eine Tür
- Wahrscheinlichkeit vor einer Tür zu stehen wird erhöht
- Wahrscheinlichkeit, sich an anderen Orten zu befinden, wird entsprechend verringert



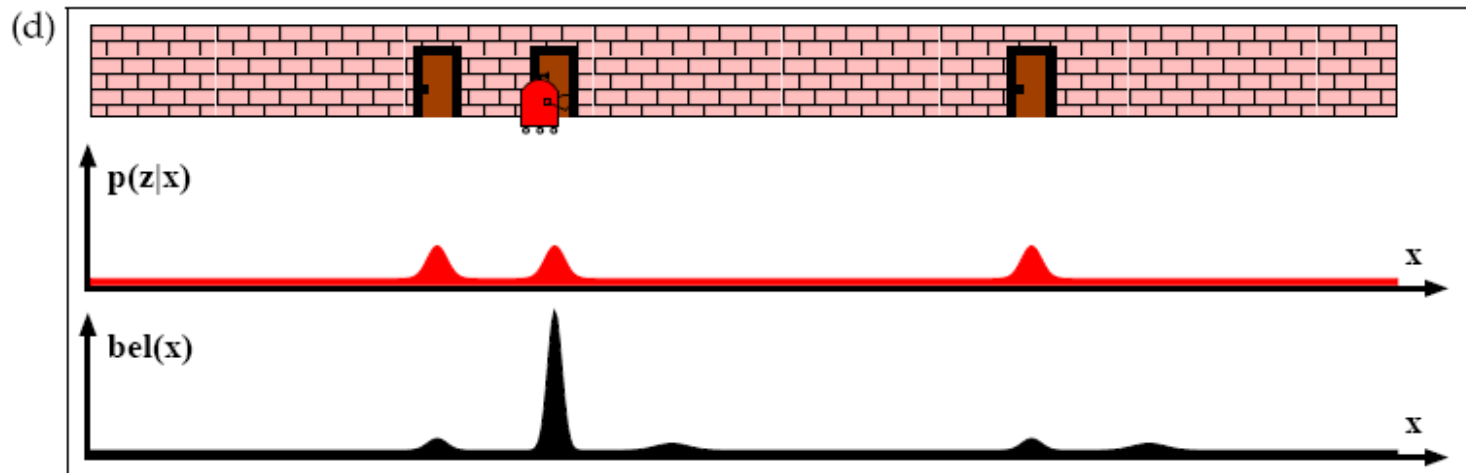
# Beispiel (c)

- Roboter fährt weiter
- wegen der möglichen Fehler bei der Ausführung dieser Aktion werden die Wahrscheinlichkeiten verändert
- Verteilung wird verschoben, aber auch geglättet



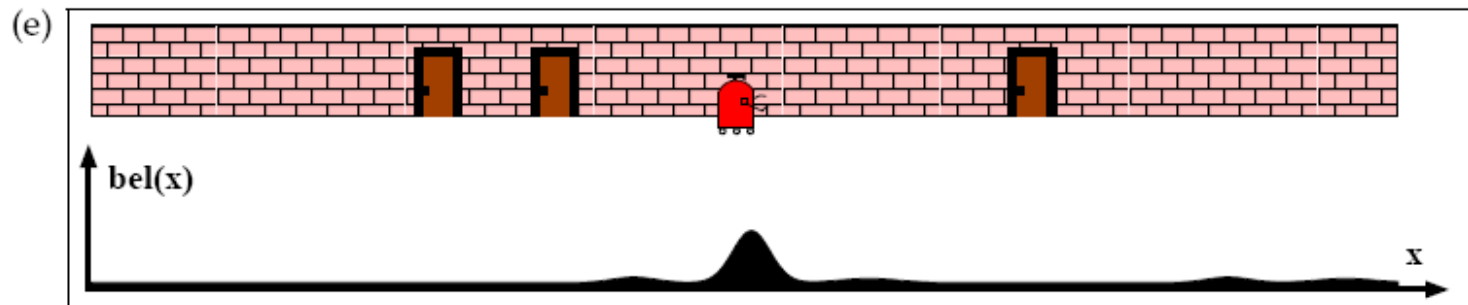
# Beispiel (d)

- Sensor sieht wiederum eine Tür
- Wahrscheinlichkeit vor der mittleren Tür zu stehen, wird erneut erhöht
- und an allen anderen Positionen weiter verringert



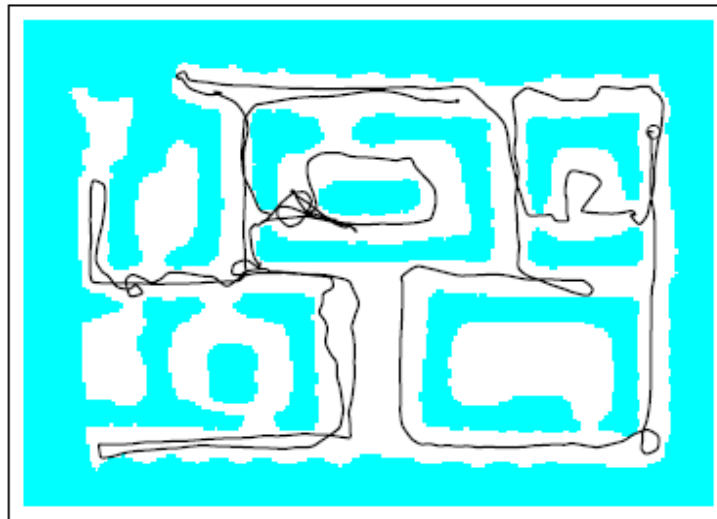
# Beispiel (e)

- Roboter bewegt sich weiter

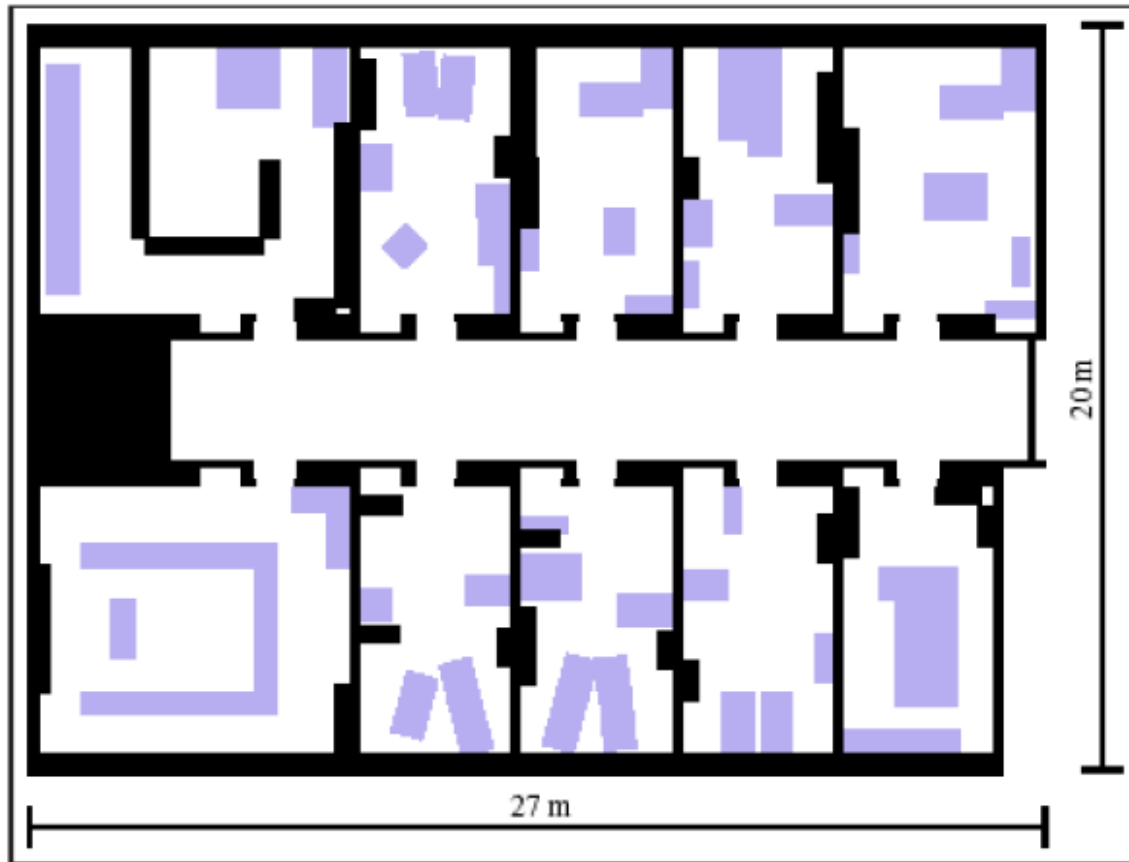


# Beispiel

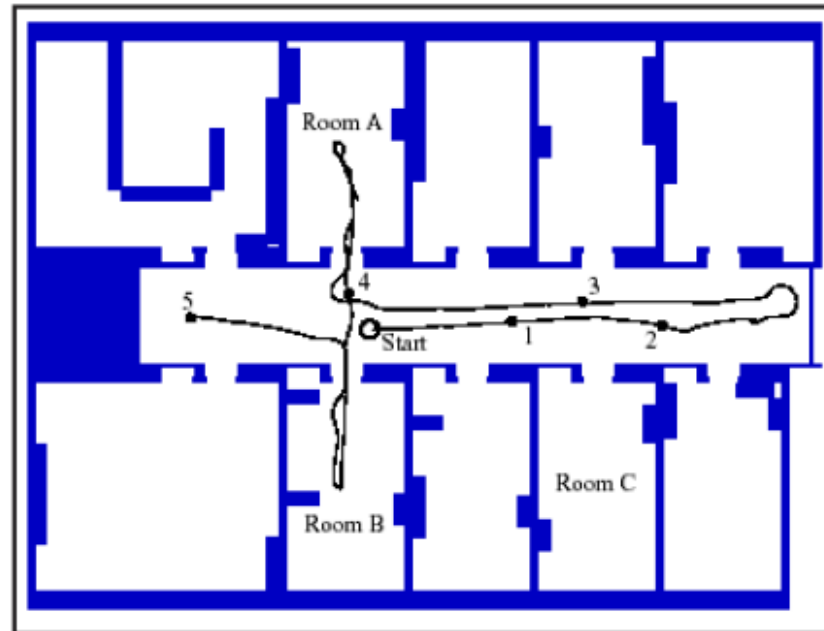
- Ultraschallsensoren



# Karte



# Tatsächlicher Weg des Roboters



# Zeitpunkt 1



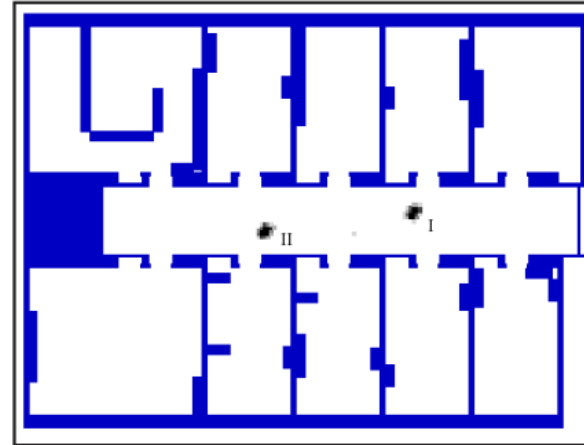
# Weitere Zeitpunkte (2 – 5 )

2



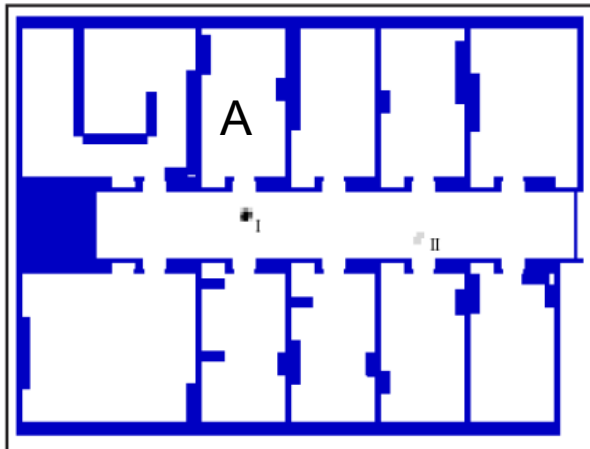
Roboter weiß, er ist im Korridor

3



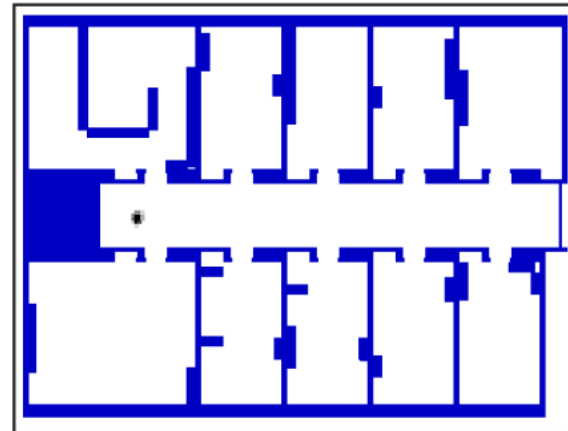
sieht Ende des Korridors (2 lokale Maxima)

4



nach Bewegung durch Raum A  
(Wahrsch. für I höher als II)

5



Endposition korrekt

## 8.4 Monte – Carlo – Lokalisation

# Monte – Carlo – Lokalisation

- Basis für dieses Verfahren bildet die Modellierung der Positionsannahme durch eine endliche Anzahl  $m$  von gewichteten Partikeln

$\text{bel}(x_t)$



$$X_t = \left\{ x_t^{(i)}, w_t^{(i)} \right\}_{i=1, \dots, m}$$

z.B.:  $m=1000$

# Idee

Positionsschätzung  $bel(x_t)$  wird durch ein Menge von **Partikeln** (vertikale Striche) dargestellt.

(a) Keine Information über die Anfangsposition; Partikel sind über alle  $x$ -Werte zufällig verteilt.

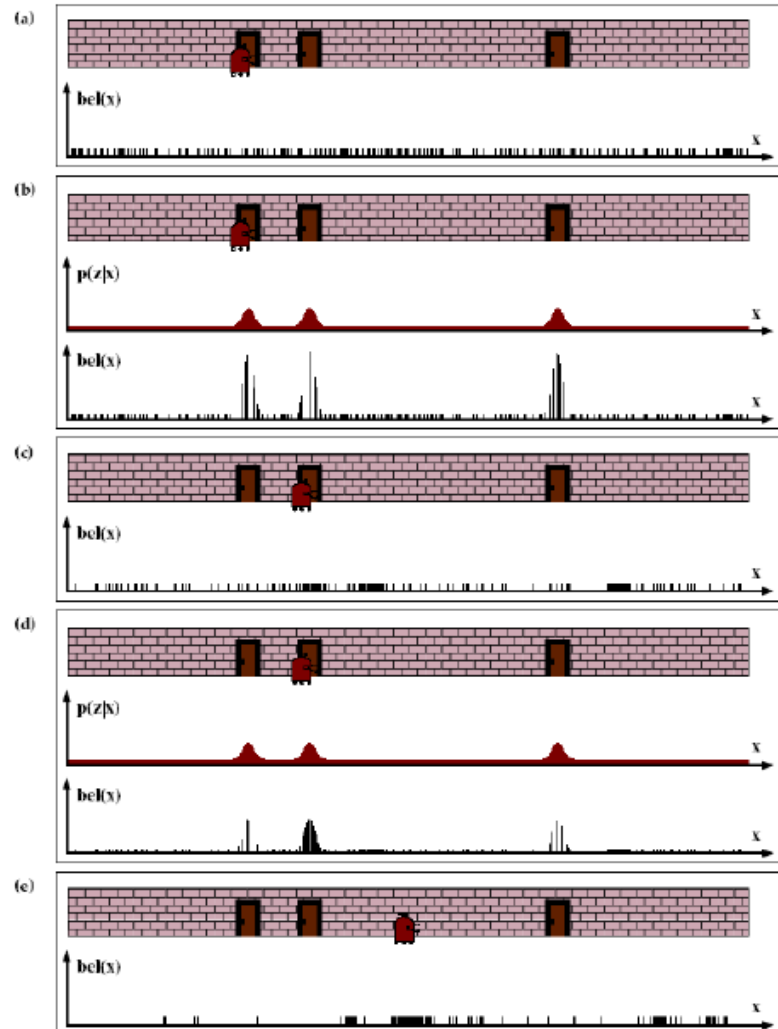
(b) **Gewichtung:**  
Durch eine Sensormessung  $z$  werden die **Gewichte** (Strichhöhe) verändert.

(c) **Resampling:**  
Aus der Partikelmenge werden zufällig aber entsprechend ihrem Gewicht Partikeln gezogen.

Anschließend wird der **Steuerbefehl** (Bewegung)  $u$  integriert.

(d) erneute **Gewichtung** mit neuem Sensorwert

(e) erneutes **Resampling** und **Integrierung des Steuerbefehls**



# Algorithmus

Eingabe:

$$X_{t-1}, u_t, z_t$$

$$p(x_t | x_{t-1}, u_t) \quad p(z_t | x_t)$$

$$X_t = \emptyset$$

$i = 1$  to  $m$

wähle zufälliges  $x_{t-1}$  aus  $X_{t-1}$  entsprechend  $w_{t-1}^{(1)}, \dots, w_{t-1}^{(m)}$

generiere zufälliges  $x_t$  aus entsprechend  $p(x_t | x_{t-1}, u_t)$

$$w_t = p(z_t | x_t)$$

füge  $(x_t, w_t)$  zu  $X_t$  hinzu

normalisiere  $w_t$  in  $X_t$

Ausgabe:

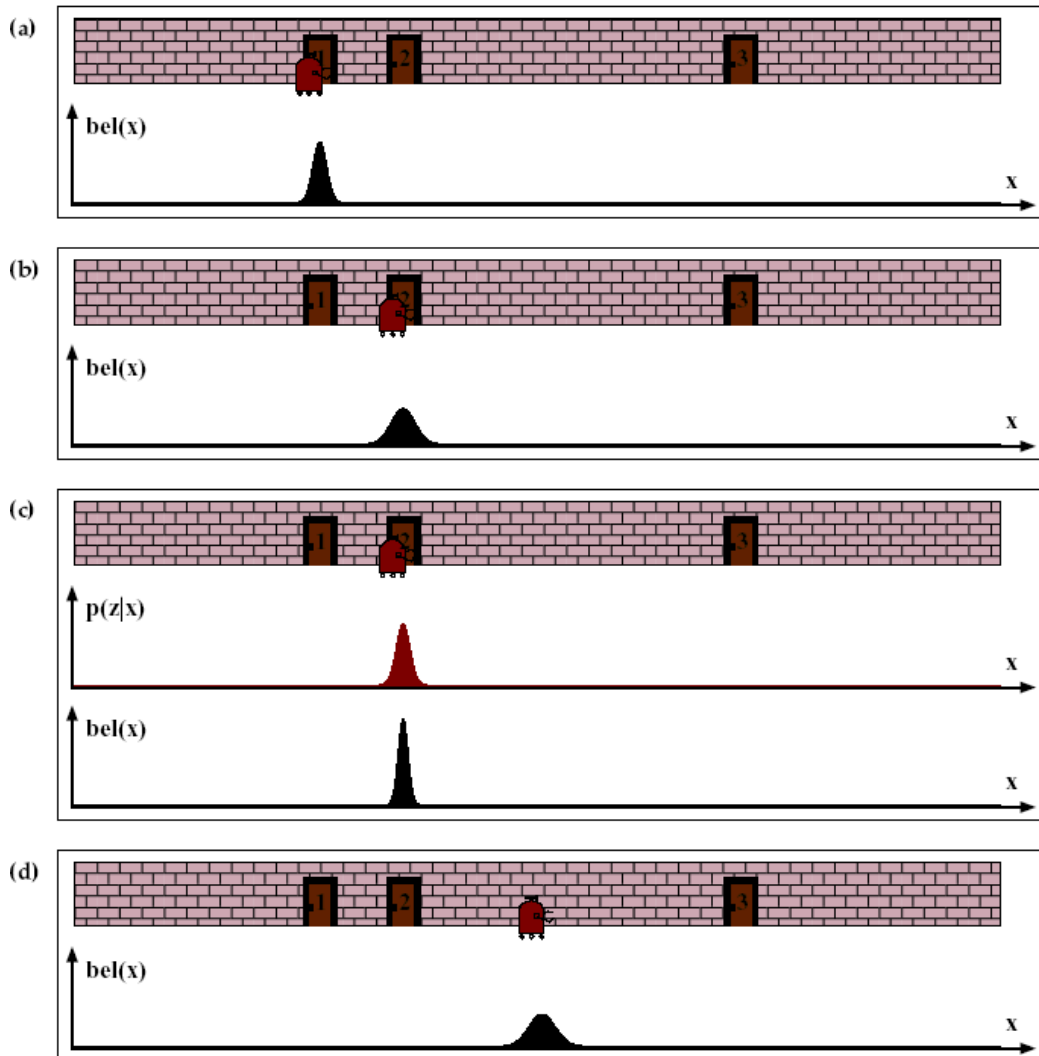
$$X_t$$

# 8.5 Kalman Filter

# Kalman Filter

- Wahrscheinlichkeitsdichte (Position), Aktionsmodell und Sensormodell sind allesamt Gaussverteilungen
- Wahrscheinlichkeitsdichte wird eindeutig durch ihren Mittelwert  $\mu$  und ihre Kovarianzmatrix  $\Sigma$  festgelegt
- Berechnung der neuen Wahrscheinlichkeiten beschränkt sich auf die Berechnung neuer Mittelwerte  $\mu$  und Kovarianzen  $\Sigma$  aus den alten Wahrscheinlichkeiten, ausgeführten Handlungen und Wahrnehmungen

# Idee des Kalman – Filters



Zustand (Position) ist normalverteilt

**Vorhersageschritt**

(prediction step):

Schätzung der neuen Position  
(Gewissheit nimmt ab)

**Korrekturschritt**

(measurement update):

aus der aktuellen Sensormessung  
wird eine Korrektur der  
Positionsschätzung vorgenommen  
Gewissheit nimmt zu.

Vorhersageschritt

...

# Kalman Filter - Grenzen

- Eignet sich nicht für globale Lokalisation
- Linearisiertes Modell für Aktionen und Wahrnehmungen

# Kalman - Filter

Berechnung von  $bel(x_t)$  für kontinuierliche Zustandsräume

$$bel(x_t) \leftarrow \det(2\pi \cdot \Sigma_t)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_t - \mu_t)^T \Sigma_t^{-1} (x_t - \mu_t)}$$

Kalman – Filter:  $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t \rightarrow \mu_t, \Sigma_t$

# Kalmanfilter - Übergangswahrscheinlichkeit

$$x_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{pmatrix} \quad u_t = \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ \vdots \\ u_{m,t} \end{pmatrix}$$

$$x_t = A_t \cdot x_{t-1} + B_t \cdot u_t + \varepsilon_t$$

normalverteilte Variable

$$N(0, R_t)$$

$A_t$  -  $n \times n$  - Matrix

$B_t$  -  $n \times m$  - Matrix

$$p(x_t | u_t, x_{t-1}) \leftarrow \det(2\pi R_t)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_t - A_t \cdot x_{t-1} - B_t \cdot u_t)^T \cdot R_t^{-1} \cdot (x_t - A_t \cdot x_{t-1} - B_t \cdot u_t)}$$

# Kalmanfilter - Auftrittswahrscheinlichkeit

$$z_t = \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ \vdots \\ z_{k,t} \end{pmatrix}$$

$$z_t = C_t \cdot x_t + \delta_t$$

normalverteilte Variable

$$N(0, Q_t)$$

$C_t$  -  $k \times n$  - Matrix

$$p(z_t | x_t) \leftarrow \det(2\pi Q_t)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z_t - C_t \cdot x_t)^T \cdot Q_t^{-1} \cdot (z_t - C_t \cdot x_t)}$$

# Algorithmus Kalman – Filter

Eingabe:  $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_t &= A_t \cdot \mu_{t-1} + B_t \cdot u_t \\ \bar{\Sigma}_t &= A_t \cdot \Sigma_{t-1} \cdot A_t^T + R_t\end{aligned}$$

Vorhersageschritt



$\bar{\text{bel}}(x_t)$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t \cdot C_t^T \cdot (C_t \cdot \bar{\Sigma}_t \cdot C_t^T + Q_t)^{-1}$$



Kalmanverstärkung  
(Kalman-Gain)

$$\begin{aligned}\mu_t &= \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \cdot \bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t &= (I - K_t \cdot C_t) \cdot \bar{\Sigma}_t\end{aligned}$$

Korrekturschritt

Ausgabe:  $\mu_t, \Sigma_t$

# Kalmanfilter im Eindimensionalen - Vorhersageschritt

$$x_t = a \cdot x_{t-1} + b \cdot u_t + \varepsilon$$

normalverteilte Variable

$$N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

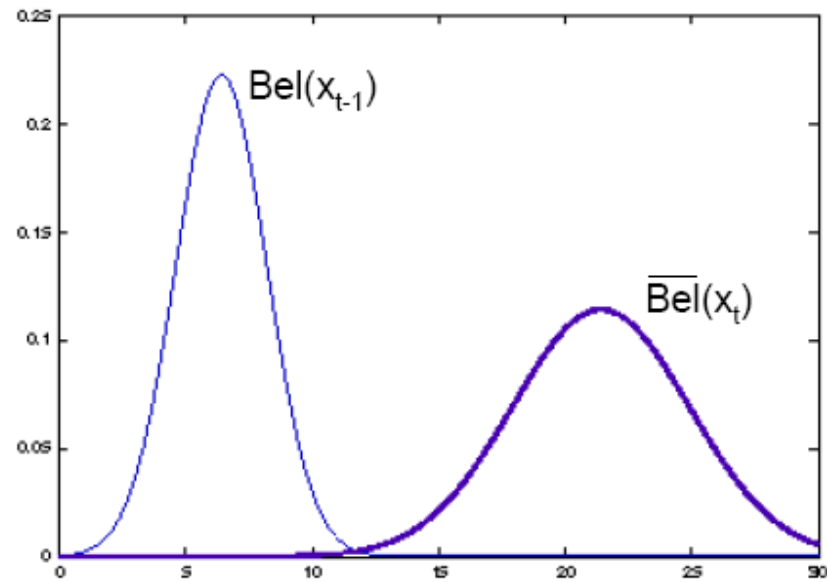
$$\bar{\mu}_t = A_t \cdot \mu_{t-1} + B_t \cdot u_t$$

$$\bar{\mu}_t = a \cdot \mu_{t-1} + b \cdot u_t$$

$$\bar{\Sigma}_t = A_t \cdot \Sigma_{t-1} \cdot A_t^T + R_t$$

$$\bar{\sigma}_t^2 = a^2 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

# Vorhersageschritt



# Kalmanfilter im Eindimensionalen - Korrekturschritt

$$z_t = c \cdot x_t + \delta$$

normalverteilte Variable

$$N(0, \sigma_\delta^2)$$

$$\bar{\mu}_t = a \cdot \mu_{t-1} + b \cdot u_t$$

$$\bar{\sigma}_t^2 = a^2 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Kalmanverstärkung (Kalman-Gain)

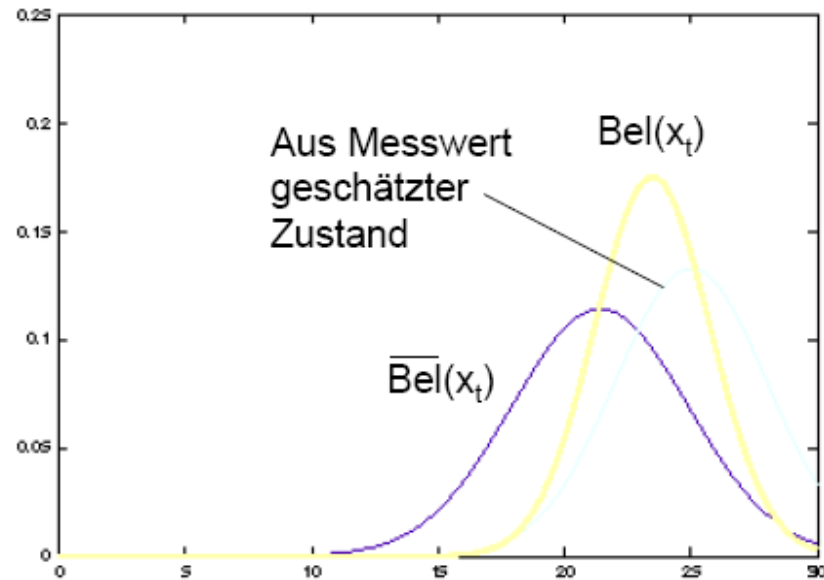
$$K_t = \bar{\Sigma}_t \cdot C_t^T \cdot (C_t \cdot \bar{\Sigma}_t \cdot C_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$K_t = \bar{\sigma}_t^2 \cdot c \cdot (c^2 \cdot \bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2)^{-1} = \frac{c \cdot \bar{\sigma}_t^2}{c^2 \cdot \bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2}$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \cdot \bar{\mu}_t)$$

$$\Sigma_t = (I - K_t \cdot C_t) \cdot \bar{\Sigma}_t \quad \sigma_t^2 = (1 - K_t \cdot c) \cdot \bar{\sigma}_t^2$$

# Kalmanfilter im Eindimensionalen - Korrekturschritt



# Kalmanfilter im Eindimensionalen

$$x_t = x_{t-1} + u_t + \varepsilon \quad z_t = x_t + \delta$$

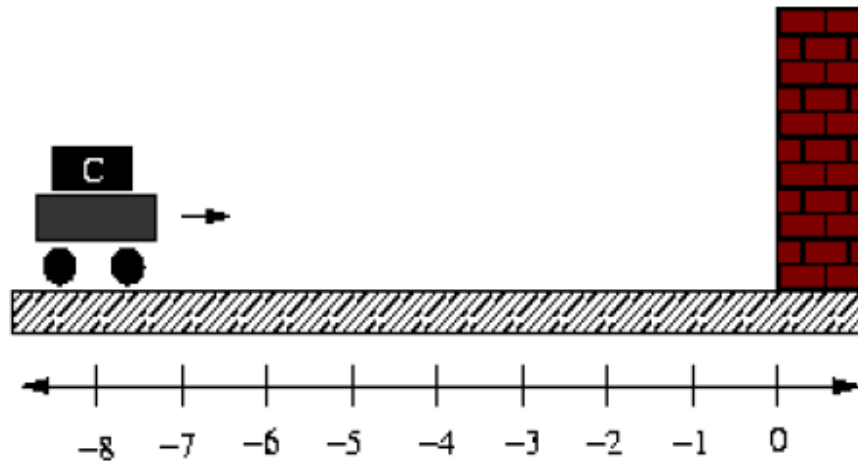
$$K_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2}$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \bar{\mu}_t) \quad \mu_t = \bar{\mu}_t \cdot \frac{\sigma_\delta^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2} + z_t \cdot \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2}$$

$$\sigma_t^2 = (1 - K_t) \cdot \bar{\sigma}_t^2 \quad \sigma_t^2 = \frac{\sigma_\delta^2 \cdot \bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2} \quad \frac{1}{\sigma_t^2} = \frac{1}{\bar{\sigma}_t^2} + \frac{1}{\sigma_\delta^2}$$

# Beispiel

- Roboter fährt mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  auf eine Wand zu
- Schätze Roboterposition  $x$  alle  $N$  Sekunden
- $v$  und  $x$  sind gaussverteilte Zufallsvariablen



# Beispiel

$$\bar{\mu}_t = \mu_{t-1} + u_t \quad \bar{\sigma}_t^2 = \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\varepsilon^2 = 0.04$$

$$\mu_0 = -8 \quad \sigma_0^2 = 0.01$$

$$\mu_1 = \bar{\mu}_1 = \mu_0 + u_1 = -8 + 1 = -7$$

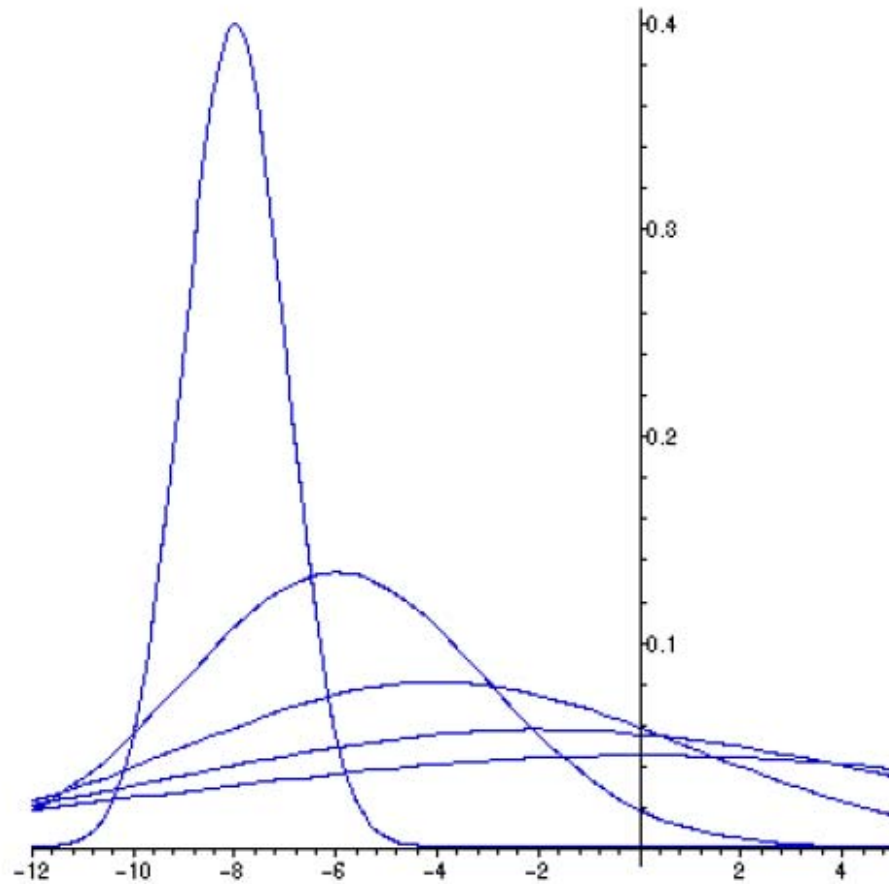
$$\sigma_1^2 = \bar{\sigma}_1^2 = \sigma_0^2 + \sigma_\varepsilon^2 = 0.01 + 0.04 = 0.05$$

$$\mu_2 = \bar{\mu}_2 = \mu_1 + u_2 = -7 + 1 = -6$$

$$\sigma_2^2 = \bar{\sigma}_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_\varepsilon^2 = 0.05 + 0.04 = 0.09$$

$$\mu_8 = 0 \quad \sigma_8^2 = 0.33$$

# Beispiel



# Beispiel – Abstandssensor

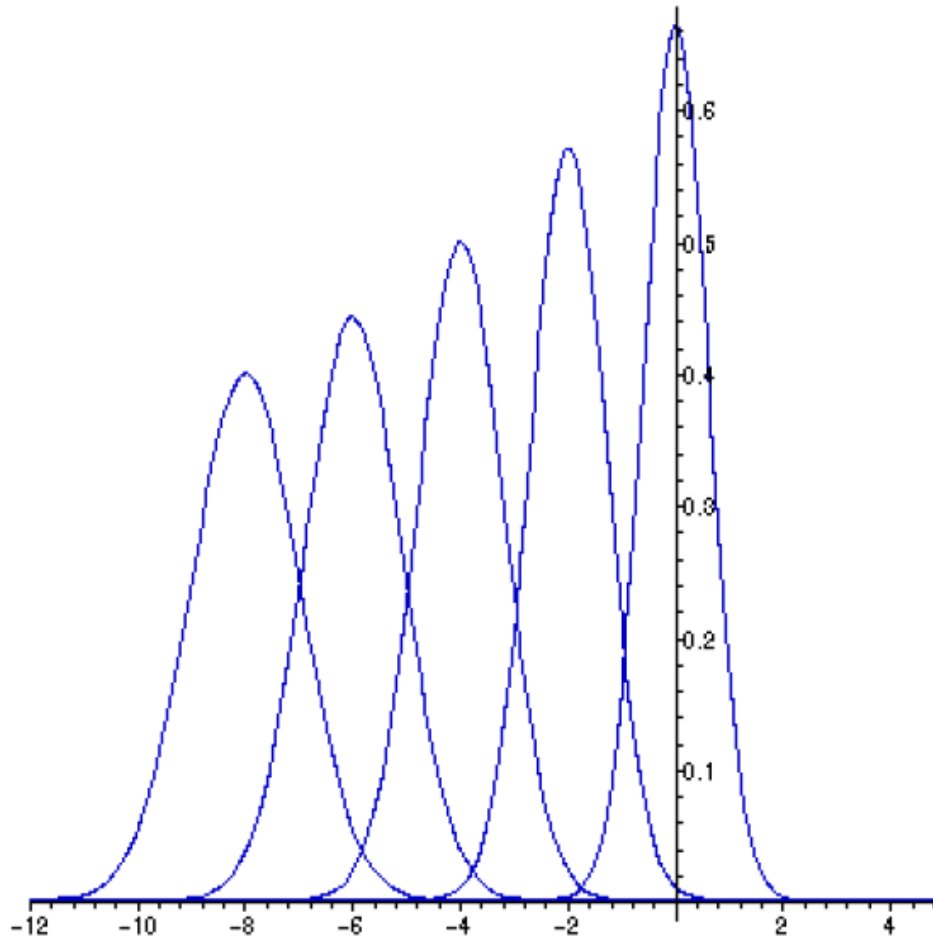
$$\mu_t = \bar{\mu}_t \cdot \frac{\sigma_\delta^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2} + z_t \cdot \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2} \quad \sigma_t^2 = \frac{\sigma_\delta^2 \cdot \bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \sigma_\delta^2}$$

$$t = 1 \quad z_1 = -7.1 \quad \sigma_\delta^2 = 0.0005$$

$$\mu_1 = (-7) \frac{0.0005}{0.0505} + (-7.1) \frac{0.05}{0.0505} = -7.09$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_\delta^2 \cdot \bar{\sigma}_1^2}{\bar{\sigma}_1^2 + \sigma_\delta^2} = \frac{0.000025}{0.0505} = 0.000495$$

# Beispiel – Abstandssensor



# Extended Kalman Filter (EKF)

$$x_t = g(u_t, x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$g'(u_t, x_{t-1}) = \frac{\partial g(u_t, x_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + g'(u_t, \mu_{t-1})(x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t(x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

( $n \times n$  - Matrix)

Jacobi - Matrix

$$p(x_t | u_t, x_{t-1}) \leftarrow \det(2\pi R_t)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_t - g(u_t, \mu_{t-1}) - G_t(x_{t-1} - \mu_{t-1}))^T \cdot R_t^{-1} \cdot (x_t - g(u_t, \mu_{t-1}) - G_t(x_{t-1} - \mu_{t-1}))}$$

# Extended Kalman Filter (EKF)

$$z_t = h(x_t) + \delta_t$$

$$h'(x_t) = \frac{\partial h(x_t)}{\partial x_t}$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + h'(\bar{\mu}_t)(x_t - \bar{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + H_t(x_t - \bar{\mu}_t)$$

$$p(z_t | x_t) \leftarrow \det(2\pi Q_t)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z_t - h(\bar{\mu}_t) - H_t(x_t - \bar{\mu}_t))^T \cdot Q_t^{-1} \cdot (z_t - h(\bar{\mu}_t) - H_t(x_t - \bar{\mu}_t))}$$

# Algorithmus EKF

Eingabe:  $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_t &= g(u_t, \mu_{t-1}) \\ \bar{\Sigma}_t &= G_t \cdot \Sigma_{t-1} \cdot G_t^T + R_t\end{aligned}$$



$\bar{\text{bel}}(x_t)$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t \cdot H_t^T \cdot (H_t \cdot \bar{\Sigma}_t \cdot H_t^T + Q_t)^{-1}$$



Kalmanverstärkung  
(Kalman-Gain)

$$\begin{aligned}\mu_t &= \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t)) \\ \Sigma_t &= (I - K_t \cdot H_t) \cdot \bar{\Sigma}_t\end{aligned}$$

Ausgabe:  $\mu_t, \Sigma_t$

# KF – EKF

$$A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \quad \text{---} \quad g(u_t, \mu_{t-1})$$

$$C_t \bar{\mu}_t \quad \text{---} \quad h(\bar{\mu}_t)$$

$$A_t \quad \text{---} \quad G_t$$

$$C_t \quad \text{---} \quad H_t$$

# Beispiel

$$\mathbf{x}_{t-1} = (x, y, \theta)^T \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}_t = (x', y', \theta')^T$$

$$\mathbf{u}_t = (v_t, w_t)^T$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{v}_t}{\hat{w}_t} \cdot \sin \theta + \frac{\hat{v}_t}{\hat{w}_t} \cdot \sin(\theta + \hat{w}_t \cdot \Delta t) \\ \frac{\hat{v}_t}{\hat{w}_t} \cdot \cos \theta - \frac{\hat{v}_t}{\hat{w}_t} \cdot \cos(\theta + \hat{w}_t \cdot \Delta t) \\ \hat{w}_t \cdot \Delta t \end{pmatrix}$$

# Beispiel

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_t \\ \hat{w}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} + N(0, M_t)$$

$$M_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 v_t^2 + \alpha_2 w_t^2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 v_t^2 + \alpha_4 w_t^2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_i \geq 0$  - roboterabhängig

$$\mathbf{x}_t = g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) + N(0, R_t)$$

$$g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v_t}{w_t} \cdot \sin \theta + \frac{v_t}{w_t} \cdot \sin(\theta + w_t \cdot \Delta t) \\ \frac{v_t}{w_t} \cdot \cos \theta - \frac{v_t}{w_t} \cdot \cos(\theta + w_t \cdot \Delta t) \\ w_t \cdot \Delta t \end{pmatrix}$$

# Beispiel

$$g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \approx g(\mathbf{u}_t, \mu_{t-1}) + G_t(\mathbf{x}_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$\mu_{t-1} = (\mu_{t-1,x}, \mu_{t-1,y}, \mu_{t-1,\theta})^T$$

$$\frac{\partial g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})}{\partial \mathbf{x}_{t-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x} & \frac{\partial \theta'}{\partial y} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad G_t = \frac{\partial g(\mathbf{u}_t, \mu_{t-1})}{\partial \mathbf{x}_{t-1}}$$

# Beispiel

$$g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v_t}{w_t} \cdot \sin \theta + \frac{v_t}{w_t} \cdot \sin(\theta + w_t \cdot \Delta t) \\ \frac{v_t}{w_t} \cdot \cos \theta - \frac{v_t}{w_t} \cdot \cos(\theta + w_t \cdot \Delta t) \\ w_t \cdot \Delta t \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})}{\partial \mathbf{x}_{t-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x} & \frac{\partial \theta'}{\partial y} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{v_t}{w_t} (-\cos(\theta) + \cos(\theta + w_t \Delta t)) \\ 0 & 1 & \frac{v_t}{w_t} (-\sin(\theta) + \sin(\theta + w_t \Delta t)) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiel

$$G_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{v_t}{w_t} (-\cos(\mu_{t-1,\theta}) + \cos(\mu_{t-1,\theta} + w_t \Delta t)) \\ 0 & 1 & \frac{v_t}{w_t} (-\sin(\mu_{t-1,\theta}) + \sin(\mu_{t-1,\theta} + w_t \Delta t)) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiel

$$\mathbf{x}_t = g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) + N(0, R_t)$$

$$V_t = \frac{\partial g(\mathbf{u}_t, \mu_{t-1})}{\partial \mathbf{u}_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial v_t} & \frac{\partial x'}{\partial w_t} \\ \frac{\partial y'}{\partial v_t} & \frac{\partial y'}{\partial w_t} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v_t} & \frac{\partial \theta'}{\partial w_t} \end{pmatrix}$$

$$V_t = \begin{pmatrix} \frac{-\sin(\mu_{t-1, \theta}) + \sin(\mu_{t-1, \theta} + w_t \Delta t)}{w_t} & \dots \\ \frac{\cos(\mu_{t-1, \theta}) - \cos(\mu_{t-1, \theta} + w_t \Delta t)}{w_t} & \dots \\ 0 & \Delta t \end{pmatrix}$$

$$R_t = V_t \cdot M_t \cdot V_t^T$$

# Beispiel

$$\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$$

$$\bar{\Sigma}_t = G_t \cdot \Sigma_{t-1} \cdot G_t^T + R_t$$

$$\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1}) = \mu_{t-1} + \begin{pmatrix} -\frac{v_t}{w_t} \cdot \sin \theta + \frac{v_t}{w_t} \cdot \sin(\theta + w_t \cdot \Delta t) \\ \frac{v_t}{w_t} \cdot \cos \theta - \frac{v_t}{w_t} \cdot \cos(\theta + w_t \cdot \Delta t) \\ w_t \cdot \Delta t \end{pmatrix} \quad \theta = \mu_{t-1, \theta}$$

$$\bar{\Sigma}_t = G_t \cdot \Sigma_{t-1} \cdot G_t^T + R_t = G_t \cdot \Sigma_{t-1} \cdot G_t^T + V_t \cdot M_t \cdot V_t^T$$

# Beispiel

$$\mathbf{z}_t^i = \begin{pmatrix} r_t^i \\ \phi_t^i \\ s_t^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{j,x} - x)^2 + (m_{j,y} - y)^2} \\ \text{atan2}(m_{j,y} - y, m_{j,x} - x) - \theta \\ m_{j,s} \end{pmatrix} + N(0, \mathbf{Q}_t)$$

$$\mathbf{m} = \{m_1, \dots, m_N\} \quad m_j = (m_{j,x}, m_{j,y}, m_{j,s})^T \quad j = c_t^i$$

$$\mathbf{z}_t^i = h(\mathbf{x}_t, j, m) + N(0, \mathbf{Q}_t)$$

$$h(\mathbf{x}_t, j, m) \approx h(\bar{\boldsymbol{\mu}}_t, j, m) + H_t^i (\mathbf{x}_t - \bar{\boldsymbol{\mu}}_t)$$

$$\mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s^2 \end{pmatrix}$$

# Beispiel

$$H_t^i = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t, j, m)}{\partial \mathbf{x}_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,x}} & \frac{\partial r_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,y}} & \frac{\partial r_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,\theta}} \\ \frac{\partial \phi_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,x}} & \frac{\partial \phi_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,y}} & \frac{\partial \phi_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,\theta}} \\ \frac{\partial s_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,x}} & \frac{\partial s_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,y}} & \frac{\partial s_t^i}{\partial \bar{\mu}_{t,\theta}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mu}_t = (\bar{\mu}_{t,x}, \bar{\mu}_{t,y}, \bar{\mu}_{t,\theta})^T$$

$$H_t^i = \begin{pmatrix} -\frac{m_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x}}{\sqrt{q}} & -\frac{m_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y}}{\sqrt{q}} & 0 \\ \frac{m_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y}}{q} & -\frac{m_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x}}{q} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q = (m_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x})^2 + (m_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y})^2$$

# Beispiel

$$K_t = \bar{\Sigma}_t \cdot H_t^T \cdot (H_t \cdot \bar{\Sigma}_t \cdot H_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t))$$
$$\Sigma_t = (I - K_t \cdot H_t) \cdot \bar{\Sigma}_t$$

for all features  $z_t^i$  :

$$S_t^i = H_t^i \cdot \bar{\Sigma}_t \cdot (H_t^i)^T + Q_t$$

$$K_t^i = \bar{\Sigma}_t \cdot (H_t^i)^T \cdot (S_t^i)^{-1}$$

$$\bar{\mu}_t = \bar{\mu}_t + K_t^i (z_t^i - \left( \begin{array}{c} \sqrt{q} \\ \text{atan } 2(m_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y}, m_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x}) - \bar{\mu}_{t,\theta} \\ m_{j,s} \end{array} \right))$$

$$\bar{\Sigma}_t = (I - K_t^i \cdot H_t^i) \cdot \bar{\Sigma}_t$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t \quad \Sigma_t = \bar{\Sigma}_t$$