6.3 Bayes Filter

6.3.1 Allgemeiner Bayes-Filter

Satz von Bayes

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x) \cdot p(x)}{p(y)}$$

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x) \cdot p(x)}{\sum_{x'} p(y \mid x') \cdot p(x')}$$

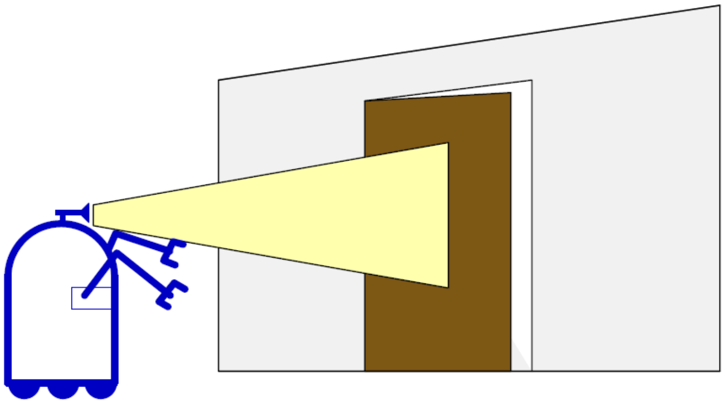
$$p(x \mid y) = \eta \cdot p(y \mid x) \cdot p(x)$$

$$p(x \mid y, z) = \frac{p(y \mid x, z) \cdot p(x \mid z)}{p(y \mid z)}$$

$$p(x) = \sum_{y} p(x \mid y) \cdot p(y)$$

Satz über die totale Wahrscheinlichkeit

Beispiel



$$p(open \mid z) = \frac{p(z \mid open) \cdot p(open)}{p(z)}$$

Beobachtung

leichter zu ermitteln

Beispiel

$$p(z \mid open) = 0.6 \qquad p(z \mid \neg open) = 0.3$$

$$p(open) = 0.5 \qquad p(\neg open) = 0.5$$

$$p(open \mid z) = \frac{p(z \mid open) \cdot p(open)}{p(z \mid open) \cdot p(open) + p(z \mid \neg open) \cdot p(\neg open)}$$

$$p(open \mid z) = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

Die Beobachtung *z* erhöht
die Wahrscheinlichkeit dafür,
dass die Tür geöffnet ist

Weitere Beobachtungen

$$p(z_2 \mid open) = 0.5 \qquad p(z_2 \mid \neg open) = 0.6 \qquad p(open \mid z_1) = \frac{2}{3}$$

$$p(open \mid z_1, z_2) = \frac{p(z_2 \mid open, z_1) \cdot p(open \mid z_1)}{p(z_2 \mid open, z_1) \cdot p(open \mid z_1) + p(z_2 \mid \neg open, z_1) \cdot p(\neg open \mid z_1)}$$

$$\Downarrow$$

Markov Annahme

$$p(open \mid z_1, z_2) = \frac{p(z_2 \mid open) \cdot p(open \mid z_1)}{p(z_2 \mid open) \cdot p(open \mid z_1) + p(z_2 \mid \neg open) \cdot p(\neg open \mid z_1)}$$

$$p(open \mid z_1, z_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Wahrscheinlichkeit wird kleiner

Weitere Beobachtungen

$$p(x \mid z_1, z_2, \ldots z_n) = \frac{p(z_n \mid x, z_1, \ldots z_{n-1}) \cdot p(x \mid z_1, \ldots z_{n-1})}{p(z_n \mid z_1, \ldots z_{n-1})}$$

Markov Annahme

$$p(x \mid z_1, z_2, \ldots z_n) = \frac{p(z_n \mid x) \cdot p(x \mid z_1, \ldots z_{n-1})}{p(z_n \mid z_1, \ldots z_{n-1})}$$

$$\boxed{p(x \mid z_1, z_2, \ldots z_n)} = \eta_1 \cdot p(z_n \mid x) \cdot \boxed{p(x \mid z_1, \ldots z_{n-1})}$$

$$\boxed{p(x \mid z_1, z_2, \ldots z_n) = \eta_{1n} \cdot \prod_{i=1}^{n} p(z_i \mid x) \cdot p(x)}$$

Bayes - Filter

$$\boxed{\mathrm{bel}(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t})}$$

$$\boxed{\overline{\mathrm{bel}}(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t})}$$

$$\overline{\mathrm{bel}}(x_1) = p(x_1 \mid u_1)$$

Bayes - Filter

rekursive Berechnung von $\boxed{\mathrm{bel}(x_t)}$

$$\mathrm{bel}(x_{t-1}) \rightarrow \mathrm{bel}(x_t)$$

$$u_t, z_t$$

$\mathrm{bel}(x_0)$ wird vorgegeben

Algorithmus Bayes - Filter

Eingabe: $\mathrm{bel}(x_{t-1}), u_t, z_t$

for all x_t do

$$\overline{\mathrm{bel}}(x_t) = \sum_{x_{t-1}} \boxed{p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)}\, \mathrm{bel}(x_{t-1})$$

$$\mathrm{bel}(x_t) = \eta \cdot \boxed{p(z_t \mid x_t)} \cdot \overline{\mathrm{bel}}(x_t)$$

Ausgabe: $\mathrm{bel}(x_t)$

müssen bekannt sein

Beweis

$$
\begin{aligned}
\mathrm{bel}(x_t) &= p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t}) \\
&= \frac{p(z_t \mid x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) \cdot p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t})}{p(z_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t})} \\
&= \eta \cdot p(z_t \mid x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) \cdot p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \eta \cdot p(z_t \mid x_t) \cdot p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \eta \cdot p(z_t \mid x_t) \cdot \overline{\mathrm{bel}}(x_t)
\end{aligned}
$$

$$p(x \mid y, z) = \frac{p(y \mid x, z) \cdot p(x \mid z)}{p(y \mid z)}$$

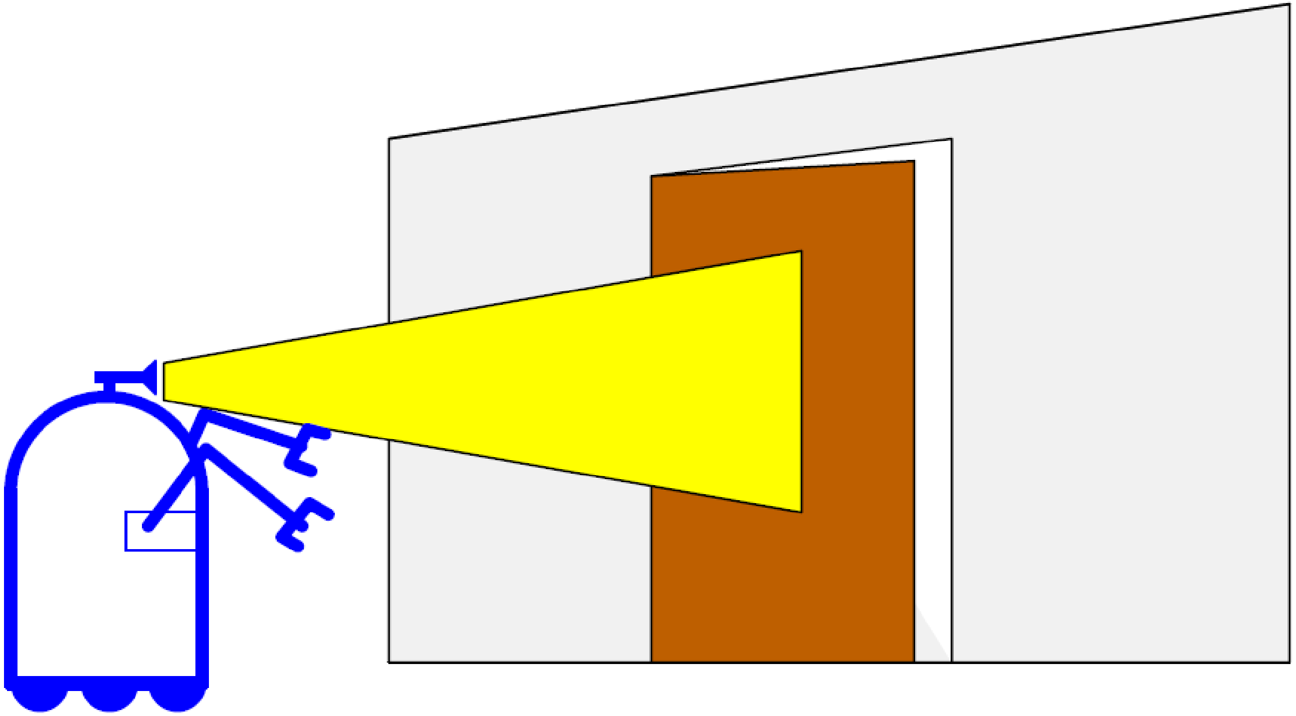
Bayes

Beweis

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{bel}}(x_t) &= p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \sum_{x_{t-1}} p(x_t \mid x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) \cdot p(x_{t-1} \mid z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \sum_{x_{t-1}} p(x_t \mid x_{t-1}, u_t) \cdot p(x_{t-1} \mid z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \sum_{x_{t-1}} p(x_t \mid x_{t-1}, u_t) \cdot p(x_{t-1} \mid z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) \\
&= \sum_{x_{t-1}} p(x_t \mid x_{t-1}, u_t) \cdot \mathrm{bel}(x_{t-1})
\end{aligned}
$$

6.3.2 Beispiel

Beispiel



Beispiel

Ein Roboter steht vor einer Tür.

Sensor des Roboters sieht, ob die Tür offen oder geschlossen.

Aber fehlerhaft!

X_t	2 Zustände	offen (Tür ist geöffnet) geschlossen (Tür ist geschlossen)
Z_t	2 Werte	offen geschlossen

Aktionen

U_t	2 Werte	oeffnen	(Öffnen der Tür)
		keine	(keine Aktion)

Anfangswahrscheinlichkeit

$$\mathrm{bel}(X_0 = \mathrm{offen}) = 0.5$$

$$\mathrm{bel}(X_0 = \mathrm{geschlossen}) = 0.5$$

Auftrittswahrscheinlichkeiten

$$p(Z_t = \text{offen} \mid X_t = \text{offen}) = 0.6$$

$$p(Z_t = \text{geschlossen} \mid X_t = \text{offen}) = 0.4$$

$$p(Z_t = \text{offen} \mid X_t = \text{geschlossen}) = 0.2$$

$$p(Z_t = \text{geschlossen} \mid X_t = \text{geschlossen}) = 0.8$$

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(X_t = \text{offen} \mid U_t = \text{oeffnen}, X_{t-1} = \text{offen}) = 1$$

$$p(X_t = \text{geschlossen} \mid U_t = \text{oeffnen}, X_{t-1} = \text{offen}) = 0$$

$$p(X_t = \text{offen} \mid U_t = \text{oeffnen}, X_{t-1} = \text{geschlossen}) = 0.8$$

$$p(X_t = \text{geschlossen} \mid U_t = \text{oeffnen}, X_{t-1} = \text{geschlossen}) = 0.2$$

$$p(X_t = \text{offen} \mid U_t = \text{keine}, X_{t-1} = \text{offen}) = 1$$

$$p(X_t = \text{geschlossen} \mid U_t = \text{keine}, X_{t-1} = \text{offen}) = 0$$

$$p(X_t = \text{offen} \mid U_t = \text{keine}, X_{t-1} = \text{geschlossen}) = 0$$

$$p(X_t = \text{geschlossen} \mid U_t = \text{keine}, X_{t-1} = \text{geschlossen}) = 1$$

1.Iteration

$$\mathrm{bel}(x_0) \to \mathrm{bel}(x_1)$$

$$U_1 = \text{keine} \qquad Z_1 = \text{offen}$$

$$\boxed{\overline{\mathrm{bel}}(x_1) = \sum_{x_0} p(x_1 \mid x_0, u_1)\,\mathrm{bel}(x_0)}$$

$$= p(x_1 \mid U_1 = \text{keine}, X_0 = \text{offen}) \cdot \mathrm{bel}(X_0 = \text{offen}) +$$
$$p(x_1 \mid U_1 = \text{keine}, X_0 = \text{geschlossen}) \cdot \mathrm{bel}(X_0 = \text{geschlossen})$$

1.Iteration

$$\boxed{\overline{\mathrm{bel}}(X_1 = \mathrm{offen})}$$

$$= p(X_1 = \mathrm{offen} \mid U_1 = \mathrm{keine}, X_0 = \mathrm{offen}) \cdot \mathrm{bel}(X_0 = \mathrm{offen}) +$$
$$p(X_1 = \mathrm{offen} \mid U_1 = \mathrm{keine}, X_0 = \mathrm{geschlossen}) \cdot \mathrm{bel}(X_0 = \mathrm{geschlossen})$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\overline{\mathrm{bel}}(X_1 = \mathrm{geschlossen})}$$

$$= p(X_1 = \mathrm{geschlossen} \mid U_1 = \mathrm{keine}, X_0 = \mathrm{offen}) \cdot \mathrm{bel}(X_0 = \mathrm{offen}) +$$
$$p(X_1 = \mathrm{geschlossen} \mid U_1 = \mathrm{keine}, X_0 = \mathrm{geschlossen}) \cdot \mathrm{bel}(X_0 = \mathrm{geschlossen})$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

1.Iteration

$$\boxed{\mathrm{bel}(x_1) = \eta \cdot p(Z_1 = \mathrm{offen} \mid x_1) \cdot \overline{\mathrm{bel}}(x_1)}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{bel}(X_1 = \mathrm{offen}) &= \eta \cdot p(Z_1 = \mathrm{offen} \mid X_1 = \mathrm{offen}) \cdot \overline{\mathrm{bel}}(X_1 = \mathrm{offen}) \\ &= \eta \cdot 0.6 \cdot 0.5 = \eta \cdot 0.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{bel}(X_1 = \mathrm{geschlossen}) &= \eta \cdot p(Z_1 = \mathrm{offen} \mid X_1 = \mathrm{geschlossen}) \cdot \overline{\mathrm{bel}}(X_1 = \mathrm{geschlossen}) \\ &= \eta \cdot 0.2 \cdot 0.5 = \eta \cdot 0.1\end{aligned}$$

$$\eta \cdot (0.3 + 0.1) = 1$$

$$\eta = 2.5$$

$$\mathrm{bel}(X_1 = \mathrm{offen}) = 2.5 \cdot 0.3 = 0.75$$

$$\mathrm{bel}(X_1 = \mathrm{geschlossen}) = 2.5 \cdot 0.1 = 0.25$$

2.Iteration

$$\mathrm{bel}(x_1) \rightarrow \mathrm{bel}(x_2)$$

$$U_2 = \mathrm{oeffnen} \quad Z_2 = \mathrm{offen}$$

$$\boxed{\overline{\mathrm{bel}}(x_2) = \sum_{x_1} p(x_2 \mid x_1, u_2)\,\mathrm{bel}(x_1)}$$

$$= p(x_2 \mid U_2 = \mathrm{oeffnen}\,, X_1 = \mathrm{offen}) \cdot \mathrm{bel}(\mathrm{X}_1 = \mathrm{offen}\,) + \\ p(x_2 \mid U_2 = \mathrm{oeffnen}\,, X_1 = \mathrm{geschlossen}) \cdot \mathrm{bel}(\mathrm{X}_1 = \mathrm{geschlossen}\,)$$

2.Iteration

$$\boxed{\overline{\mathrm{bel}}(X_2 = \mathrm{offen})}$$

$$= p(X_2 = \mathrm{offen} \mid U_2 = \mathrm{oeffnen}, X_1 = \mathrm{offen}) \cdot \mathrm{bel}(\mathrm{X}_1 = \mathrm{offen}) + p(X_2 = \mathrm{offen} \mid U_2 = \mathrm{oeffnen}, X_1 = \mathrm{geschlossen}) \cdot \mathrm{bel}(\mathrm{X}_1 = \mathrm{geschlossen})$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{4} + 0.8 \cdot \frac{1}{4} = 0.95$$

$$\boxed{\overline{\mathrm{bel}}(X_2 = \mathrm{geschlossen})}$$

$$= p(X_2 = \mathrm{geschlossen} \mid U_2 = \mathrm{oeffnen}, X_1 = \mathrm{offen}) \cdot \mathrm{bel}(\mathrm{X}_1 = \mathrm{offen}) + p(X_2 = \mathrm{geschlossen} \mid U_2 = \mathrm{oeffnen}, X_1 = \mathrm{geschlossen}) \cdot \mathrm{bel}(\mathrm{X}_1 = \mathrm{geschlossen})$$

$$= 0 \cdot \frac{3}{4} + 0.2 \cdot \frac{1}{4} = 0.05$$

2.Iteration

$$\boxed{\mathrm{bel}(x_2) = \eta \cdot p(Z_2 = \mathrm{offen} \mid x_2) \cdot \overline{\mathrm{bel}}(x_2)}$$

$$\mathrm{bel}(X_2 = \mathrm{offen}) = \eta \cdot p(Z_2 = \mathrm{offen} \mid X_2 = \mathrm{offen}) \cdot \overline{\mathrm{bel}}(X_2 = \mathrm{offen})$$
$$= \eta \cdot 0.6 \cdot 0.95 = \eta \cdot 0.57$$

$$\mathrm{bel}(X_2 = \mathrm{geschlossen}) = \eta \cdot p(Z_2 = \mathrm{offen} \mid X_2 = \mathrm{geschlossen}) \cdot \overline{\mathrm{bel}}(X_2 = \mathrm{geschlossen})$$
$$= \eta \cdot 0.2 \cdot 0.05 = \eta \cdot 0.01$$

$$\eta \cdot (0.57 + 0.01) = 1$$

$$\eta = \frac{100}{58}$$

$$\mathrm{bel}(X_2 = \mathrm{offen}) = \frac{57}{58} \approx 0.983$$

$$\mathrm{bel}(X_2 = \mathrm{geschlossen}) = \frac{1}{58} \approx 0.017$$

6.3.3 Diskreter Bayes – Filter

Diskreter Bayes - Filter

X_t - endlich, x_i, x_k - Werte

$$\text{bel}(x_{k,t}) = p_{k,t} = p(X_t = x_k \mid z_{1:t}, u_{1:t})$$

$$\overline{\text{bel}}(x_{k,t}) = \overline{p}_{k,t} = p(X_t = x_k \mid z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

Eingabe: $\{p_{k,t-1}\}, u_t, z_t$

for all k do

$$\overline{p}_{k,t} = \sum_i p(X_t = x_k \mid u_t, X_{t-1} = x_i) \cdot p_{i,t-1}$$

$$p_{k,t} = \eta \cdot p(z_t \mid X_t = x_k) \cdot \overline{p}_{k,t}$$

Ausgabe: $\{p_{k,t}\}$

6.3.4 Binary – Bayes – Filter

Binary – Bayes - Filter

Zustand X (statisch) hat 2 Werte $x, \neg x$

$$\mathrm{bel}_t(x) = p(x \mid z_{1:t}, u_{1:t}) = p(x \mid z_{1:t})$$

$$\mathrm{bel}_t(\neg x) = 1 - \mathrm{bel}_t(x)$$

$$l_t(x) = \log \frac{\mathrm{bel}_t(x)}{1 - \mathrm{bel}_t(x)}$$

$$\mathrm{bel}_t(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^{l_t(x)}}$$

$$l(x) = l_0(x) = \log \frac{p(x)}{1 - p(x)}$$

$p(x \mid z_t)$ - inverses Sensormodell

Algorithmus

Eingabe: l_{t-1}, z_t

$$\boxed{l_t = l_{t-1} + \log \frac{p(x \mid z_t)}{1 - p(x \mid z_t)} - \log \frac{p(x)}{1 - p(x)}}$$

Ausgabe: l_t

Herleitung

$$p(x \mid z_{1:t}) = \frac{\boxed{p(z_t \mid x, z_{1:t-1})} \cdot p(x \mid z_{1:t-1})}{p(z_t \mid z_{1:t-1})}$$

$$= \frac{\boxed{p(z_t \mid x)} \cdot p(x \mid z_{1:t-1})}{p(z_t \mid z_{1:t-1})}$$

$$p(z_t \mid x) = \frac{p(x \mid z_t) \cdot p(z_t)}{p(x)}$$

$$p(x \mid z_{1:t}) = \frac{\boxed{p(x \mid z_t) \cdot p(z_t)} \cdot p(x \mid z_{1:t-1})}{\boxed{p(x)} \cdot p(z_t \mid z_{1:t-1})}$$

analog:

$$p(\neg x \mid z_{1:t}) = \frac{p(\neg x \mid z_t) \cdot p(z_t) \cdot p(\neg x \mid z_{1:t-1})}{p(\neg x) \cdot p(z_t \mid z_{1:t-1})}$$

Herleitung

$$p(x \mid z_{1:t}) = \frac{p(x \mid z_t) \cdot p(z_t) \cdot p(x \mid z_{1:t-1})}{p(x) \cdot p(z_t \mid z_{1:t-1})} \qquad p(\neg x \mid z_{1:t}) = \frac{p(\neg x \mid z_t) \cdot p(z_t) \cdot p(\neg x \mid z_{1:t-1})}{p(\neg x) \cdot p(z_t \mid z_{1:t-1})}$$

$$\frac{p(x \mid z_{1:t})}{p(\neg x \mid z_{1:t})} = \frac{p(x \mid z_t)}{p(\neg x \mid z_t)} \cdot \frac{p(x \mid z_{1:t-1})}{p(\neg x \mid z_{1:t-1})} \cdot \frac{p(\neg x)}{p(x)}$$

$$l_t(x) = l_{t-1}(x) + \log \frac{p(x \mid z_t)}{1 - p(x \mid z_t)} - \log \frac{p(x)}{1 - p(x)}$$

6.4 Sensormodell

Sensormodell

Karte ist eine Menge von Landmarken $$m = \{m_1, \ldots, m_N\}$$

$$m_j = (m_{j,x}, m_{j,y}, s_j)^T$$

Ort Signature

Sensorbeobachtung $\Rightarrow$ $$(r_t^i, \phi_t^i, s_t^i)^T \quad i = 1,2,\ldots$$

Abstand

Lage der Landmarke relativ zum Roboter

Signature

Sensormodell

$$f(z_t) = \{ f_t^1, f_t^2, \ldots, f_t^i, \ldots \} = \{ \begin{pmatrix} r_t^1 \\ \phi_t^1 \\ s_t^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_t^2 \\ \phi_t^2 \\ s_t^2 \end{pmatrix}, \ldots \}$$

Feature Extraktion

Anzahl ist mit der Zeit t variabel

$$m = \{ m_1, \ldots, m_N \} \qquad m_j = (m_{j,x}, m_{j,y}, s_j)^T$$

Korrespondenz zwischen f_t^i und m_j zum Zeitpunkt t

$$\boxed{j = c_t^i \in \{1, 2, \ldots, N+1\}} \qquad j = N+1$$

Sensor sieht keine Landmarke

Sensormodell

$$\mathbf{x}_t = (x, y, \theta)^T$$

Position des Roboters

Gesucht:

$$p(f(z_t) \mid \mathbf{x}_t, m) = \prod_i p(r_t^i, \phi_t^i, s_t^i \mid \mathbf{x}_t, m)$$

$$\begin{pmatrix} r_t^i \\ \phi_t^i \\ s_t^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{j,x} - x)^2 + (m_{j,y} - y)^2} \\ \operatorname{atan2}(m_{j,y} - y, m_{j,x} - x) - \theta \\ s_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{\sigma_r^2} \\ \varepsilon_{\sigma_\phi^2} \\ \varepsilon_{\sigma_s^2} \end{pmatrix}$$

Sensorbeobachtung

exakter Wert

Fehler (Normalverteilung)

Sensormodell

$$p(r_t^i, \phi_t^i, s_t^i \mid \mathbf{x}_t, m) \rightarrow N(\mathbf{a}; \mu_\mathbf{t}, \Sigma_t)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_t^i \\ \phi_t^i \\ s_t^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{j,x} - x)^2 + (m_{j,y} - y)^2} \\ \operatorname{atan} 2(m_{j,y} - y, m_{j,x} - x) - \theta \\ s_j \end{pmatrix}$$

$$\mu_t = (0,0,0)^T$$

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s^2 \end{pmatrix}$$

$$p(r_t^i, \phi_t^i, s_t^i \mid \mathbf{x}_t, m) \leftarrow \mathrm{prob}(a_1, \sigma_r) \cdot \mathrm{prob}(a_2, \sigma_\phi) \cdot \mathrm{prob}(a_3, \sigma_s)$$

$$\mathrm{prob}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2}}$$

atan2

$$\operatorname{atan}2(y,x)=\begin{cases}\operatorname{atan}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{falls} \quad x>0\\ \operatorname{sign}(y)\cdot\left(\pi-\operatorname{atan}\left(\left|\dfrac{y}{x}\right|\right)\right) & \text{falls} \quad x<0\\ 0 & \text{falls} \quad x=y=0\\ sign(y)\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{falls} \quad x=0, y\neq 0\end{cases}$$

6.5 Bewegungsmodell

Aktionsmodell

$$\mathbf{x}_{t-1} = (x, y, \theta)^T \Rightarrow \mathbf{x}_t = (x', y', \theta')^T$$

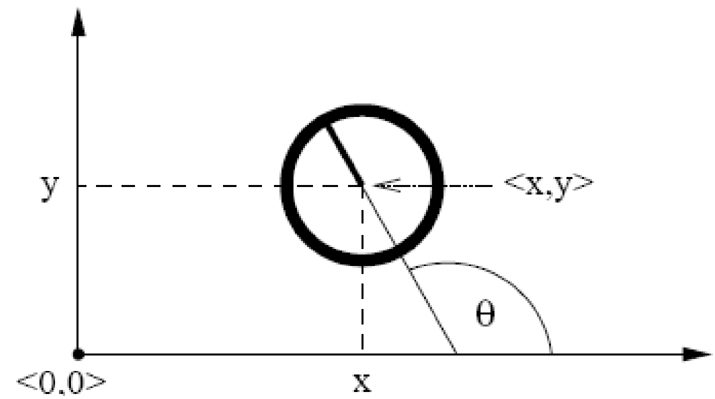
$$\mathbf{u}_t = (v, w)^T$$

Translationsgeschwindigkeit

Rotationsgeschwindigkeit

Beschreibung eines Zustandes

$$\mathbf{x} = (x, y, \theta)^T$$



$$\theta = 0 \Rightarrow \text{Richtung x - Achse}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Richtung y - Achse}$$

Exakte Bewegung

$$\mathbf{x}_{t-1} = (x, y, \theta)^T$$

$$\mathbf{u}_t = (v, w)^T$$

$$\mathbf{x}_t = (x', y', \theta')^T$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v}{w} \cdot \sin\theta + \frac{v}{w} \cdot \sin(\theta + w \cdot \Delta t) \\ \frac{v}{w} \cdot \cos\theta - \frac{v}{w} \cdot \cos(\theta + w \cdot \Delta t) \\ w \cdot \Delta t \end{pmatrix}$$

Reale Bewegung

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha_1|v|+\alpha_2|w|} \\ \varepsilon_{\alpha_3|v|+\alpha_4|w|} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + N(0, M)$$

Fehler (Normalverteilung)

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 v^2 + \alpha_2 w^2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 v^2 + \alpha_4 w^2 \end{pmatrix}$$

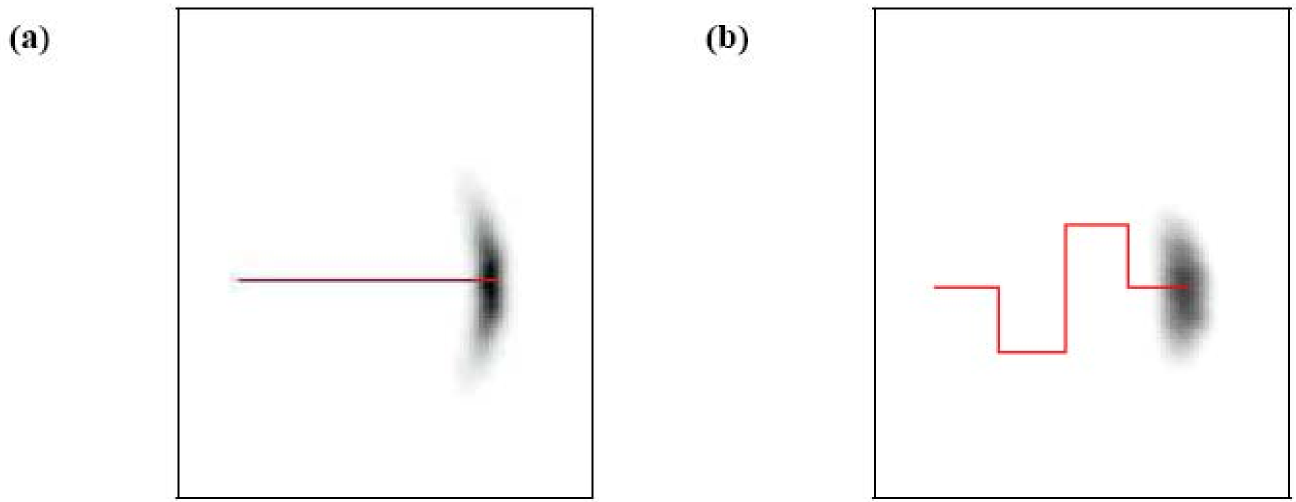
$\alpha_i \geq 0$ - roboterabhängig

Reale Bewegung

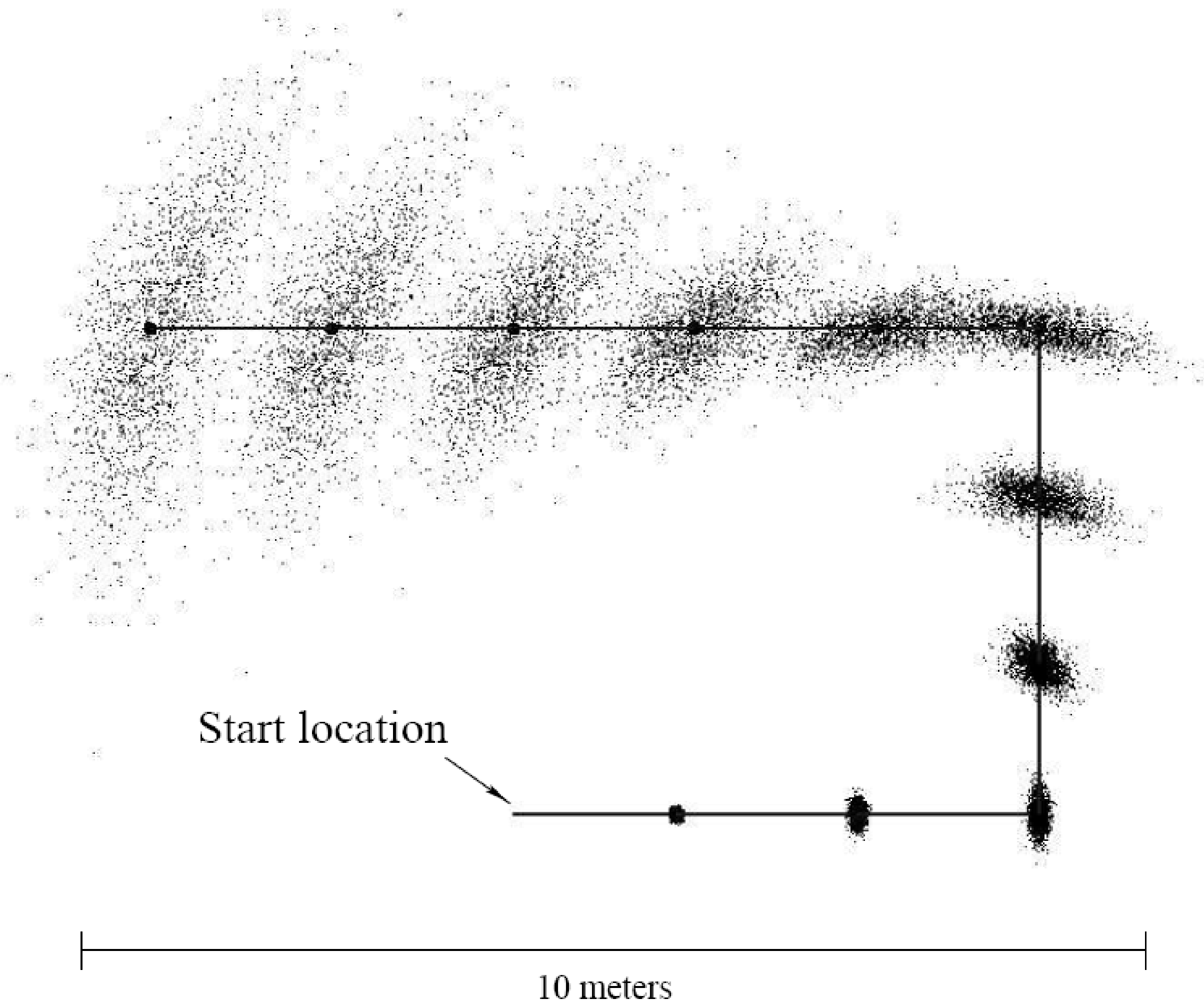
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{v}}{\hat{w}} \cdot \sin\theta \ + \frac{\hat{v}}{\hat{w}} \cdot \sin(\theta + \hat{w} \cdot \Delta t) \\ \frac{\hat{v}}{\hat{w}} \cdot \cos\theta - \frac{\hat{v}}{\hat{w}} \cdot \cos(\theta + \hat{w} \cdot \Delta t) \\ \hat{w} \cdot \Delta t \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{v}}{\hat{w}} \cdot \sin\theta \ + \frac{\hat{v}}{\hat{w}} \cdot \sin(\theta + \hat{w} \cdot \Delta t) \\ \frac{\hat{v}}{\hat{w}} \cdot \cos\theta - \frac{\hat{v}}{\hat{w}} \cdot \cos(\theta + \hat{w} \cdot \Delta t) \\ \hat{w} \cdot \Delta t + \hat{\gamma} \cdot \Delta t \\ \end{pmatrix}$$

Übergangswahrscheinlichkeit



Übergangswahrscheinlichkeit



Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\boxed{p(x_t \mid u_t, x_{t-1})}$$

Eingabe: x_t, u_t, x_{t-1}

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - x')\cos\theta + (y - y')\sin\theta}{(y - y')\cos\theta + (x - x')\sin\theta}$$

$$y^* = \frac{y + y'}{2} + \mu \cdot (x' - x)$$

$$x^* = \frac{x + x'}{2} + \mu \cdot (y - y')$$

$$r^* = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$$

Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\Delta\theta = \operatorname{atan}2(y'-y^*, x'-x^*) - \operatorname{atan}2(y-y^*, x-x^*)$$

$$\hat{v} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot r^* \qquad \hat{w} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \hat{\gamma} = \frac{\theta' - \theta}{\Delta t} - \hat{w}$$

Ausgabe:

$$\operatorname{prob}(v-\hat{v}, \alpha_1|v| + \alpha_2|w|) \cdot \operatorname{prob}(w-\hat{w}, \alpha_3|v| + \alpha_4|w|) \cdot \operatorname{prob}(\hat{\gamma}, \alpha_5|v| + \alpha_6|w|)$$