6 Navigation für autonome mobile Roboter – Grundlagen

Navigation für autonome mobile Roboter

- Problemstellung
- Bezeichnungen
- Bayes Filter
- Sensormodell
- Bewegungsmodell
- Kartenerstellung – Umgebungsmodellierung
- Selbstlokalisation
- Kalman Filter
- SLAM – Simultaneous Localization and Mapping
- Pfadplanung

6.1 Problemstellung

Navigation

- ***bekannte Umgebung***, auch keine Veränderung der Umgebung während der Fahrt
- ***unbekannte Umgebung***

Statische und dynamische Umgebungen

- Statisch
  - Nur der Zustand des Roboters innerhalb der Umgebung ändert sich
  - Karte ist wahre Umgebung
- Dynamisch
  - Objekte ändern ihre Lage oder ihren Zustand (Verrücken von Tischen, Tür offen oder geschlossen)
  - Auftreten neuer Objekte (Personen, andere Roboter)

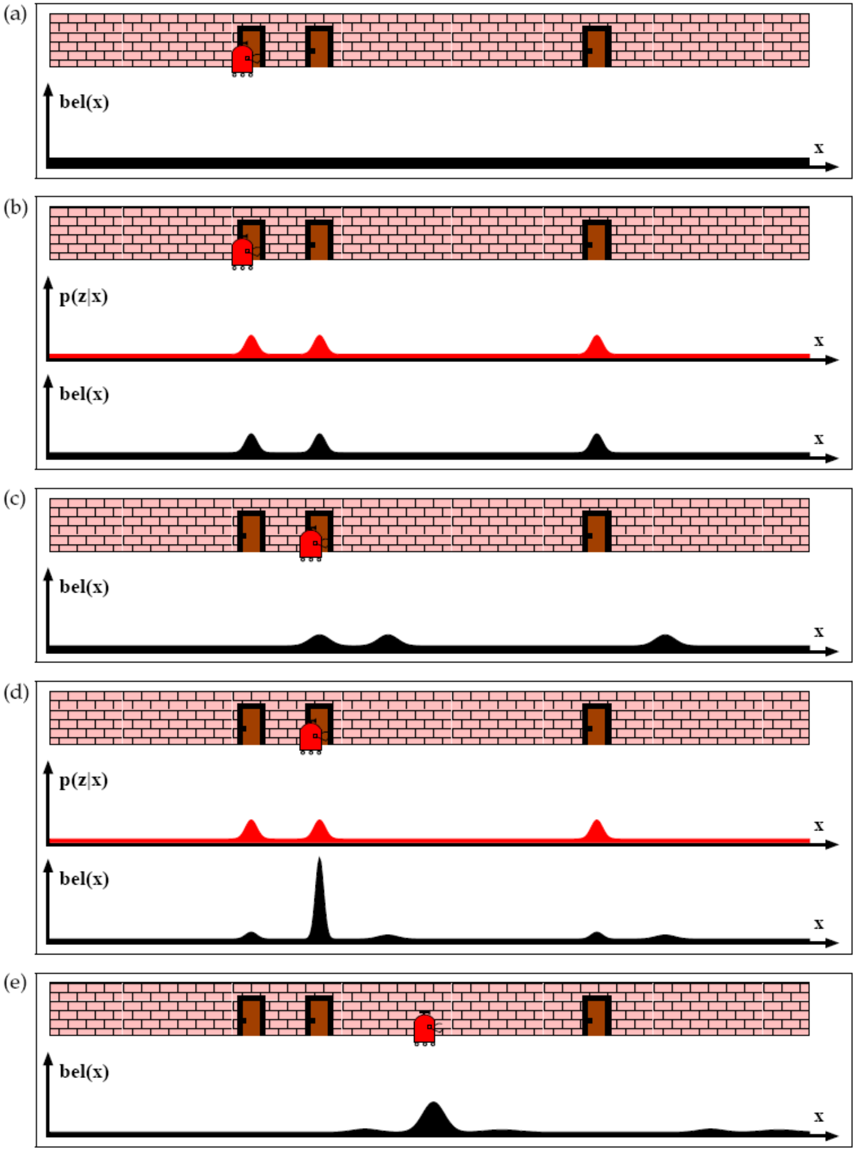
Navigationsaufgaben

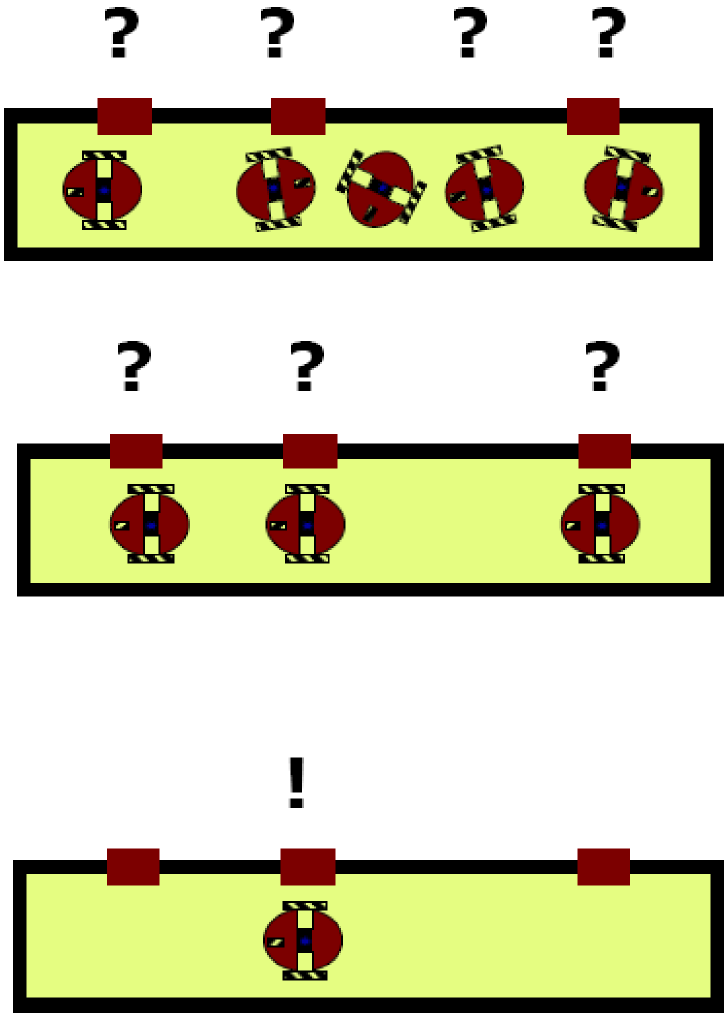
- ***Selbstlokalisierung*** – Wo bin ich?
- ***Kartenerstellung*** – Umgebungsmodellierung
- ***Pfad(Weg)planung*** – Wie gelange ich zum Ziel?

Selbstlokalisierung

- Position und Orientierung innerhalb der Umgebung finden
- mit Hilfe von Sensoren
  - Odometrie (Radencoder, Kompass)
  - relative Position zu Objekten (Infrarot, Ultraschall, Laser, Kamera)
  - absolute Position (GPS)
- Selbstlokalisierung und Kartenerstellung bedingen sich gegenseitig (SLAM)

Markov Lokalisation





Lokale und globale Selbstlokalisation

- Lokal
  - Ausgangsposition des Roboters ist bekannt
- Global
  - Position des Roboters ohne Kenntnis der Ausgangsposition schätzen
- Kidnaped robot
  - Ein Roboter lokalisiert sich erfolgreich selbst wenn er ohne sein Wissen zwischenzeitlich an einen unbekannten Ort gebracht wird
  - Robuste Relokalisation obwohl der Roboter irrtümlicherweise zu wissen meint wo er sich befindet

Passive und aktive Selbstlokalisation

- Passiv
  - Bewegung des Roboters und Orientierung der Sensoren (Kamerablickrichtung) werden nicht beeinflusst
- Aktiv
  - Roboter fährt gezielt bestimmte Orte an
  - Orientierung der Sensoren werden aktiv gewählt

Karte

- Geometrisch
  - 2D, 3D
  - Zellen (besetzt, frei)
- Topologisch
  - Knoten (Landmarken)
  - Kanten (Verbindungen)

Wegplanung

- kollisionsfreie Wege von einer Start- zu einer Zielposition finden
- Diese Wege soll der Roboter dann in der realen Welt abfahren.
- Erfüllung gewisser Optimalitätskriterien

Wegplanung - Verfahren

- geometrische Wegplanung (bekannte Umgebung)
  - Sichtbarkeitsgraph (Weglänge wird minimiert)
  - Voronoi-Diagramm (Abstand zu Hindernissen wird maximiert)
- lokale Bewegungssteuerung (Umgebung kann sich verändern)
- Reinforcement Learning (Umgebung unbekannt)
- Optimierungsverfahren

6.2 Bezeichnungen

6.2.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Erwartungswert - Mittelwert

X - Zufallsvariable $\qquad p(x_i) = p(X = x_i)$

$$\boxed{E[X] = \mu = \mu_X = \sum_i x_i \cdot p(x_i)}$$

$(X$ - diskret$)$

Eigenschaften:

$$E[a \cdot X + b] = a \cdot E[X] + b$$
$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$
$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot p(x_i)$$
$$E[X^n] = \sum_i x_i^n \cdot p(x_i) \text{ - Momente von } X$$
$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] \text{ - } X \text{ und } Y \text{ unabhängig}$$

Verteilungsfunktion (stetig)
(distribution function continuous)

$$F : R \to R$$

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

Verteilungsfunktion bezüglich p

Dichtefunktion

$$F(x) = p(]-\infty, x]) = p(X \leq x)$$

Dichtefunktion (density function)

$$f : R \to R$$

f ist integrierbar

$$f(t) \geq 0, \; t \in R$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x_0) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$$F(x) = p(]-\infty, x])$$

Eigenschaften

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt = p(a < X \leq b)$$

$$p(X > c) = 1 - F(c) = \int_c^\infty f(t)dt$$

$$p(X = x_0) = 0, \quad x_0 \in R$$

$$p(x_0 \leq X \leq x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) \cdot \Delta x_0 \quad x_0 \text{ - Stetigkeitspunkt von } f$$

Varianz

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2}$$

$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ - Standardabweichung

Eigenschaft: $\mathrm{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$

Erwartungswert und Varianz (expectation – variance)

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot dt$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2 \cdot f(t) \cdot dt$$

Kovarianz

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[X\cdot Y] - \mu_X\cdot\mu_Y$$

Eigenschaften:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$$

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \text{ - } X \text{ und } Y \text{ unabhängig}$$

$$\mathrm{Cov}(X+Z,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Z,Y)$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_i X_i, Y\right) = \sum_i \mathrm{Cov}(X_i,Y)$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\cdot\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathrm{Var}(X_i) + \sum_i\sum_{j\neq i}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

Korrelation

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\cdot\mathrm{Var}(Y)}} \in (-1,1)$$

Kovarianzmatrix

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \qquad \sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Normalverteilung (Gauß) - skalar

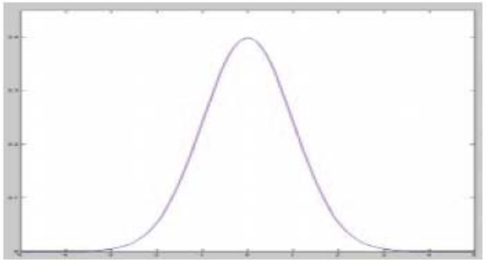
$$N(x;\mu,\sigma^2) = f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$E[X] = \mu$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mathrm{Cov}(X,X)$$

Erwartungswert, mean

Varianz, variance



σ Standardabweichung

Normalverteilung – Gaußverteilung (normal Gauss distribution Gaussian distribution)

$$f(x) = N(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \sigma > 0$$

$$N(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Phi(x) = p(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

$$\Phi(-x) = 1-\Phi(x) \qquad \Phi(-x \le X \le x) = 2\Phi(x)-1$$

Normalverteilung – Gaußverteilung

$$\Phi(-1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0{,}683$$

$$\Phi(-2 \leq X \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0{,}954$$

$$\Phi(-3 \leq X \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0{,}997$$

Normalverteilung (Gauß) - skalar

$$N(x;\mu,\sigma^2) = f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$x = a$$

$$\mu = 0$$

$$\sigma^2 = b^2$$

$$\mathrm{prob}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b^2}}$$

Fehler mit Normalverteilung

$$\mathrm{prob}(a,b) = \varepsilon_b(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b^2}}$$

$$\hat{x} = x + N(0,\sigma^2)$$

$$\hat{x} = x + \varepsilon_\sigma$$

(Schreibweisen)

realer Wert

exakter Wert

$$x_{\mathrm{err}} = x - \hat{x}$$

$$f(x_{\mathrm{err}}) = \varepsilon_\sigma(x - \hat{x})$$

Fehler (normalverteilte Zufallsvariable)

Normalverteilung (Gauß) - allgemein

$$N(\mathbf{x};\mu,\Sigma) = f(\mathbf{x}) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\mu)}$$

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$E[X] = \mu$$ Erwartungswert, mean

$$\mu^T = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Covariance matrix

symmetrisch, positivsemidefinit

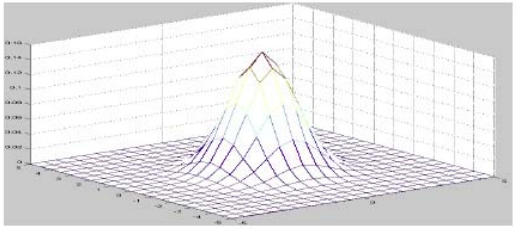
$(\text{für alle } \mathbf{x} \text{ gilt}: \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\Sigma\mathbf{x} \geq 0)$

Normalverteilung (Gauß) – n=2

$$N(\mathbf{x};\mu,\Sigma) = f(\mathbf{x}) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\mu)}$$

$$N(\mathbf{x};\mu,\Sigma) = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\det(\Sigma)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\mu)}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \qquad |\rho| < 1$$



Normalverteilung (Gauß) - Spezialfall

$$N(\mathbf{x};\mu,\Sigma) = f(\mathbf{x}) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\mu)}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Komponenten unabhängig

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \sigma_i} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}$$

Fehler mit Normalverteilung

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + N(\mathbf{x};\mathbf{0},\Sigma) \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{err}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

Schreibweise

realer Wert

exakter Wert

Fehler

$$\boxed{f(\mathbf{x}_{\mathrm{err}}) = N(\mathbf{x}_{\mathrm{err}};\mathbf{0},\Sigma)}$$

6.2.2 Zustand, Sensordaten, Aktion

Zustand, Sensordaten, Aktion

Zustand x_t

Sensordaten z_t $\qquad z_{t_1:t_2} = z_{t_1}, z_{t_1+1}, \ldots, z_{t_2}$

Aktion u_t $\qquad u_{t_1:t_2} = u_{t_1}, u_{t_1+1}, \ldots, u_{t_2}$

$$x_{t-1} \longrightarrow x_t$$

X_t, Z_t, U_t - Zufallsvariablen mit Werten $x_t, z_t, u_t, \ldots$

$p(x_t) = p(X_t = x_t)$

Zustände

Zeit (diskret) $t = 0,1,2,\ldots$

Zustand X_t X

diskret oder stetig

Position des Roboters (6 Werte)
Geschwindigkeit
Gelenkparameter
Objekte der Welt

$$\mathbf{x}_t = (x, y, \theta)^T$$

X_t - Zufallsvariable mit Werten x_t

$$p(x_t) = p(X_t = x_t)$$

$$\sum_{x_t} P(X_t = x_t) = 1$$

Sensordaten

Sensordaten Z_t

$$z_{t_1:t_2} = z_{t_1}, z_{t_1+1}, \ldots, z_{t_2}$$

Z_t - Zufallsvariable mit Werten z_t

$$p(z_t) = p(Z_t = z_t)$$

$$\sum_{z_t} P(Z_t = z_t) = 1$$

Aktionen

Aktion u_t

$$x_{t-1} \rightarrow x_t$$

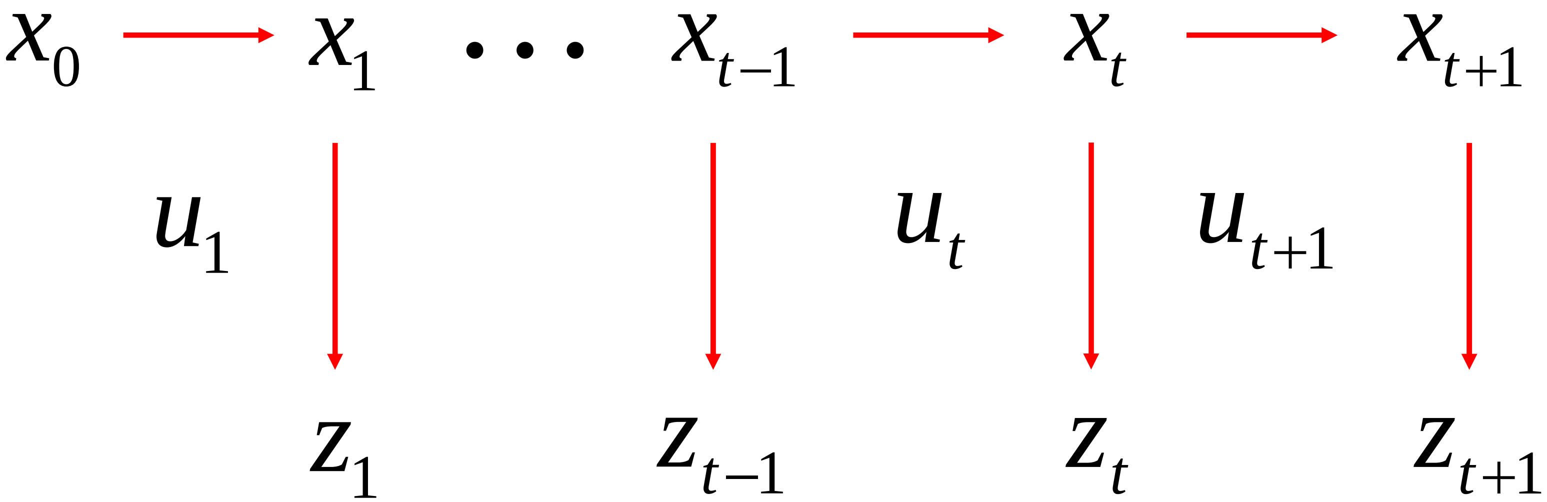
$$u_{t_1:t_2} = u_{t_1}, u_{t_1+1}, \ldots, u_{t_2}$$

U_t - Zufallsvariable mit Werten u_t

$$p(u_t) = p(U_t = u_t)$$

$$\sum_{u_t} P(U_t = u_t) = 1$$

HMM – Hidden Markov Modell



Annahmen

$$p(x_t \mid x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$$

Übergangswahrscheinlichkeit

$$p(z_t \mid x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t \mid x_t)$$

Auftrittswahrscheinlichkeit

belief

$$\boxed{\mathrm{bel}(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t})}$$

$$\overline{\mathrm{bel}}(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

$$\overline{\mathrm{bel}}(x_1) = p(x_1 \mid u_1)$$

6.2.3 Karte - Umweltbeschreibung

Karte

$$\boxed{m = \{m_1, \ldots, m_N\}} \qquad 1 \leq j \leq N$$

Menge von Objekten (Landmarken) in der Umwelt
zusammen mit ihren Eigenschaften

feature-based j - Index eines Merkmals

m_j Eigenschaften und Ortskoordinate des Merkmals

location-based j – korrespondiert mit Ortkoordinaten x,y

$m_j \rightarrow m_{x,y}$ Eigenschaft des Punktes (x,y)

Landmarken - Feature-based

Torpfosten

Fensterbrett

Baumstamm

Gebäudeecken

$$m_j = (m_{j,x}, m_{j,y}, s_j)^T$$

Ort

Signature

Vektor von numerischen Werten (Höhe, Farbe)

Occupancy grid map - location-based

(x, y) → belegt mit Objekt oder nicht

→ 0 oder 1

Vorteil: günstig für die Wegplanung