5 Fuzzy – Unscharfe Mengen

Fuzzy – Unscharfe Mengen

- Motivation – Einfaches Modell eines Fuzzy Reglers
- Unscharfe Mengen
- Interpretation linguistischer Werte
- Operationen auf unscharfen Mengen
- Fuzzy Relationen
- Fuzzy Logik
- Fuzzy Regler - Beispiel

Begriff Fuzzy

- Fuzzy Set Theory
- Fuzzy Logic
- Fuzzy Arithmetik
- Fuzzy Control

Grundlagen

Anwendung

Grundlagen: 1965 - Zadeh

Anwendung: 1985

5.1 Motivation – Einfaches Modell eines Fuzzy Reglers

Motivation – Einfaches Modell eines Fuzzy Reglers

Regelung:

Abweichung eines Kontollparameters
von einem vorgegebenen Sollwert

$\downarrow$

Veränderung einer Stellgröße

Beispiel:

Kontrollparameter - Raumtemperatur

Stellgröße - Ventil

Diskreter – Regler

$$\boxed{\Delta \underbrace{u(k)}_{\text{Stellgröße}} = K_1 \cdot \Delta e(k) + K_2 \cdot \underbrace{e(k)}_{\text{Fehler}}}$$

diskreter Zeitpunkt

Konstanten

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

berechnete Veränderung der Stellgröße

$$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1)$$

Änderung des Fehlers

Fehler

$$\boxed{e(k) = y_{SW} - y(k)}$$

Sollwert

tatsächliche Ausgabe des Systems

Fuzzy Regelung

benutzt **keine** analytischen Ausdrücke zur Regelung

Wissensbasis aus **Fuzzy – Regeln**:

wenn Prozesszustand dann Stellwert

Werte der Variablen

$e(k)$

- NG (negativ groß)
- NK (negativ klein)
- N (Null)
- PK (positiv klein)
- PG (positiv groß)

$\Delta u(k)$

- NG (negativ groß)
- NK (negativ klein)
- N (Null)
- PK (positiv klein)
- PG (positiv groß)
- DÄ (drastische Änderung)

$\Delta e(k)$

- NG
- K (klein)
- PG

Werte der Variablen

$\boxed{e(k)} \longrightarrow \boxed{\text{PK}}$

$$e(k) = y_{SW} - y(k) \qquad \Rightarrow y_{SW} > y(k)$$

$y(k)$ ist wenig kleiner als y_{SW}

Werte der Variablen

$\boxed{\Delta e(k)} \rightarrow \boxed{\text{NG}}$

$$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1) =$$

$$y_{SW} - y(k) - (y_{SW} - y(k-1)) = y(k-1) - y(k)$$

die aktuelle Systemausgabe ist **wesentlich größer** als die vorangegangene

Werte der Variablen

$\boxed{\Delta e(k)} \longrightarrow \boxed{\text{K}}$

$$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1) =$$

$$y_{SW} - y(k) - (y_{SW} - y(k-1)) = y(k-1) - y(k)$$

die aktuelle Systemausgabe ist **geringfügig gestiegen oder gefallen**

Regeln (aktive)

werden bei jedem Kontrollzyklus ausgewertet

wenn $\boxed{e(k) = PG}$ und $\boxed{\Delta e(k) = NG}$

dann $\boxed{\Delta u(k) = PK}$

$y(k)$ deutlich unter y_{SW}

$y(k)$ wesentlich größer als $y(k-1)$

$y(k-1)$ ist noch schlechter als $y(k)$

$u(k)$ etwas erhöhen

Tabelle aller Regeln

$\Delta u(k)$		$\Delta e(k)$		
		NG	K	PG
$e(k)$	NG	NG	NG	NK
	NK	NK	NK	N
	N		N	
	PK	N	PK	PK
	PG	PK	PG	PG

Regeln (kritischer Bereich)

wenn $e(k)$ im kritischen Bereich

dann $\Delta u(k) = D\ddot{A}$

5.2 Unscharfe Mengen

Linguistische Variablen und Werte

$e(k), \Delta e(k), \Delta u(k) \longrightarrow$ linguistische Variablen

$NG, NK, \ldots \longrightarrow$ linguistische Werte

Wie rechnet man mit diesen Werten?

Unscharfe Mengen

Die Zuordnung einzelner Elemente zu einer Menge ist oft umstritten.

Ist 15° C eine hohe Temperatur?

Solche Einschätzungen haben nichts mit Wahrscheinlichkeiten zu tun?

Zugehörigkeitsfunktion

U - beliebige Menge (Grundbereich)

$$\mu_F : U \to [0,1]$$

Zugehörigkeitsfunktion von F

$$F = \{(u, \mu_F(u)) : u \in U\}$$

unscharfe Menge über U

Menge der großen Säugetiere

$\boxed{U} \longrightarrow$ {Wal,Elefant,Büffel,Löwe,Bär,Hund,…}

$\boxed{F} \longrightarrow$ {(Wal,1),(Elefant,1),(Büffel,0.7),(Löwe,0.6),(Bär,0.6),(Hund,0.3),…}

$\boxed{\mu_F}$

Wal	$\longrightarrow$	1
Elefant	$\longrightarrow$	1
Löwe	$\longrightarrow$	0.6
Hund	$\longrightarrow$	0.3

Menge der natürlichen Zahlen, die dicht bei 6 liegen

$\boxed{U}$ $\{0,1,2,\ldots\}$

$$\boxed{\frac{1}{1+(n-6)^2}}$$

$\boxed{\mu_F}$

3	0.1
4	0.2
5	0.5
6	1.0
7	0.5
8	0.2
9	0.1

normale Menge

U beliebig $A \subseteq U$

$$\mu_A(u) = 1, u \in A$$
$$\mu_A(u) = 0, u \notin A$$

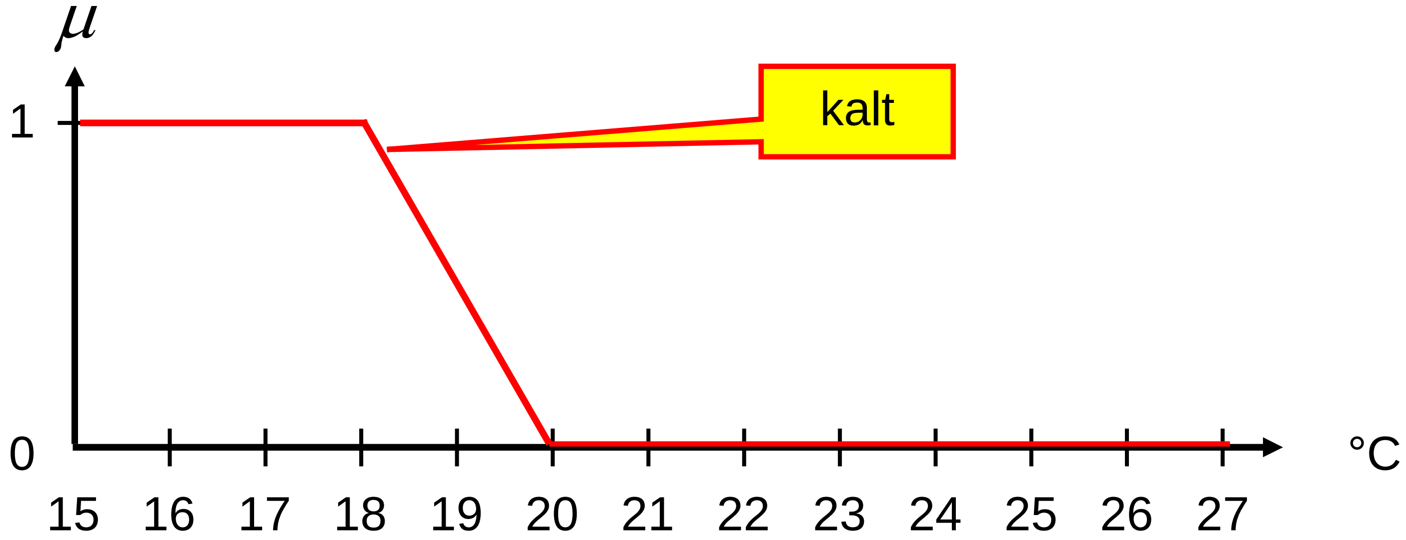
charakteristische Funktion der Menge A

Temperatur

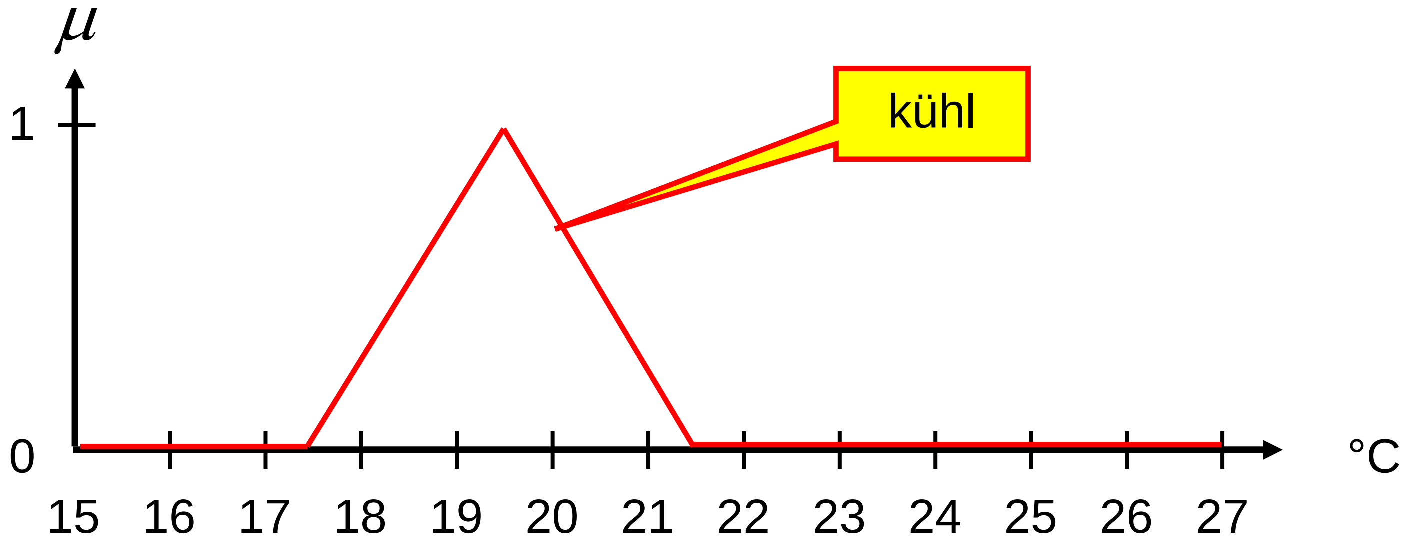
$$U = [15°C, 27°C]$$

Werte: kalt, kühl, angenehm, warm, heiß

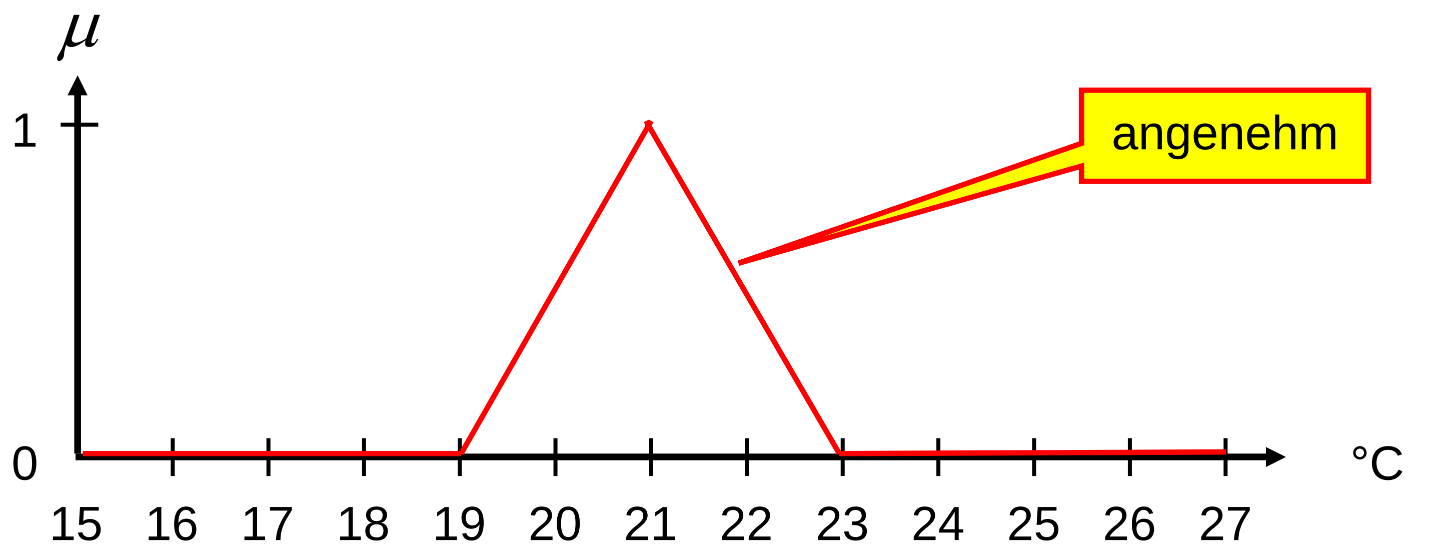
kalt



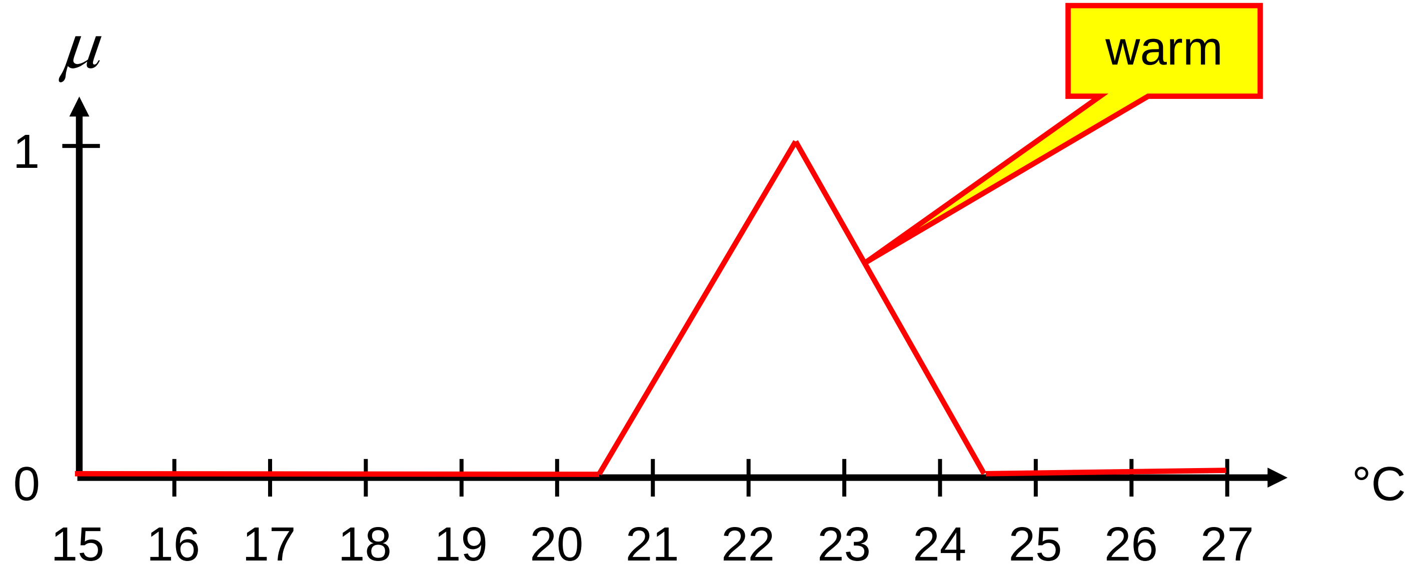
kühl



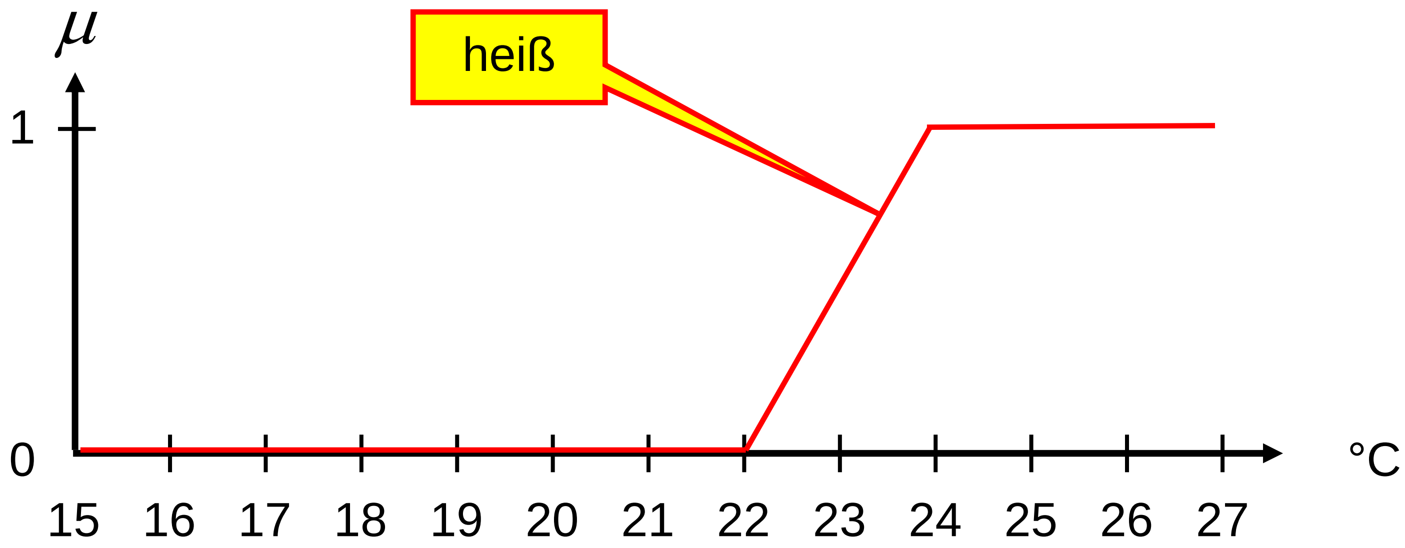
angenehm



warm



heiß



5.3 Interpretation linguistischer Werte

Linguistische Variable

$$(X, LX, U, M_X)$$

Name

Menge der Werte

Funktion, die jedem Wert eine unscharfe Menge über U zuordnet

Grundbereich

Beispiel

X — Temperatur

LX — kalt, kühl, angenehm, warm, heiß

U — 15°C,…,27°C

M_X — unscharfe Mengen

5.4 Operationen auf unscharfen Mengen

Teilmenge

$$A \subseteq B$$

$$\boxed{\mu_A(u) \leq \mu_B(u)} \qquad \forall u \in U$$

Durchschnitt, Vereinigung

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

5.5 Fuzzy Relationen

Fuzzy Relationen

$$\mu_R : X \times Y \to [0,1]$$

Zugehörigkeitsfunktion von R

$$R = \{((x,y),\mu_R(x,y)) : (x,y) \in X \times Y\}$$

unscharfe Relation

Beispiel - fastgleich

$$X = Y = \{1,2,3\}$$

R

fastgleich

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0.8 \quad \text{falls} & |x-y| = 1 \\ 0.3 & |x-y| = 2 \end{cases}$$

5.6 Fuzzy Logik

unscharfe atomare Aussage

$$(X, LX, U_1, M_X)$$

linguistische Variable

X ist e

$$e \in LX$$

unscharfe atomare Aussage

$$M_X(e)$$

$$\mu_{M_X(e)}$$

Bedeutung der Aussage

Konjunktion

$$(X, LX, U_1, M_X)$$

linguistische Variablen

$$(Y, LY, U_2, M_Y)$$

$p: \ X$ ist A

$q: \ Y$ ist B

2 atomare Aussagen

$$p \wedge q \Rightarrow \mu(u_1, u_2) = \min\{\mu_A(u_1), \mu_B(u_2)\}$$

Bedeutung

Disjunktion

$$(X, LX, U_1, M_X)$$

linguistische Variablen

$$(Y, LY, U_2, M_Y)$$

$p: \ X$ ist A

$q: \ Y$ ist B

2 atomare Aussagen

$$p \vee q \Rightarrow \mu(u_1, u_2) = \max\{\mu_A(u_1), \mu_B(u_2)\}$$

Bedeutung

Implikation

$$(X, LX, U_1, M_X)$$

linguistische Variablen

$$(Y, LY, U_2, M_Y)$$

$p:\ X$ ist A

$q:\ Y$ ist B

2 atomare Aussagen

$$p \rightarrow q \quad \Longrightarrow \quad \mu(u_1, u_2) = \min\{\mu_A(u_1), \mu_B(u_2)\}$$

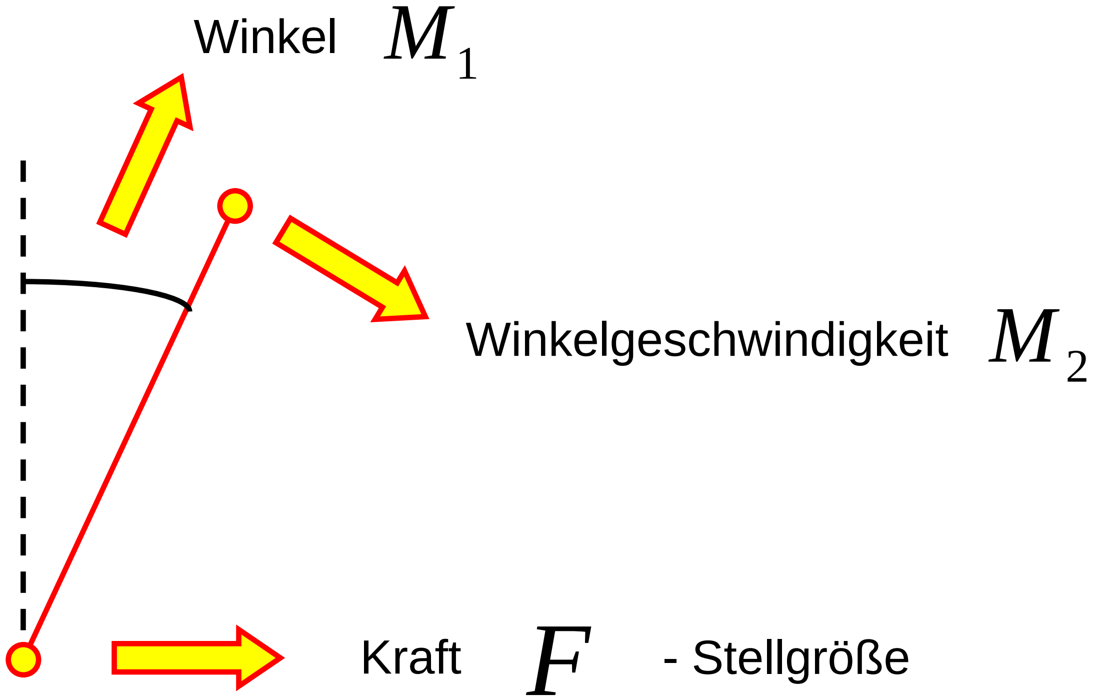
Bedeutung

5.7 Fuzzy Regler

Fuzzy Regler

- Fuzzyfizierungsmodul
  - Normalisierung
  - wandelt scharfe Eingabewerte in unscharfe Mengen um
- Wissensbasis
  - Datenbasis (linguistische Variablen)
  - Regelbasis
- Defuzzyfizierungsmodul
  - wandelt die unscharfe Ausgabe der Wissensbasis in eine normale Ausgabe
  - Denormalisierung

Beispiel



Grundbereiche

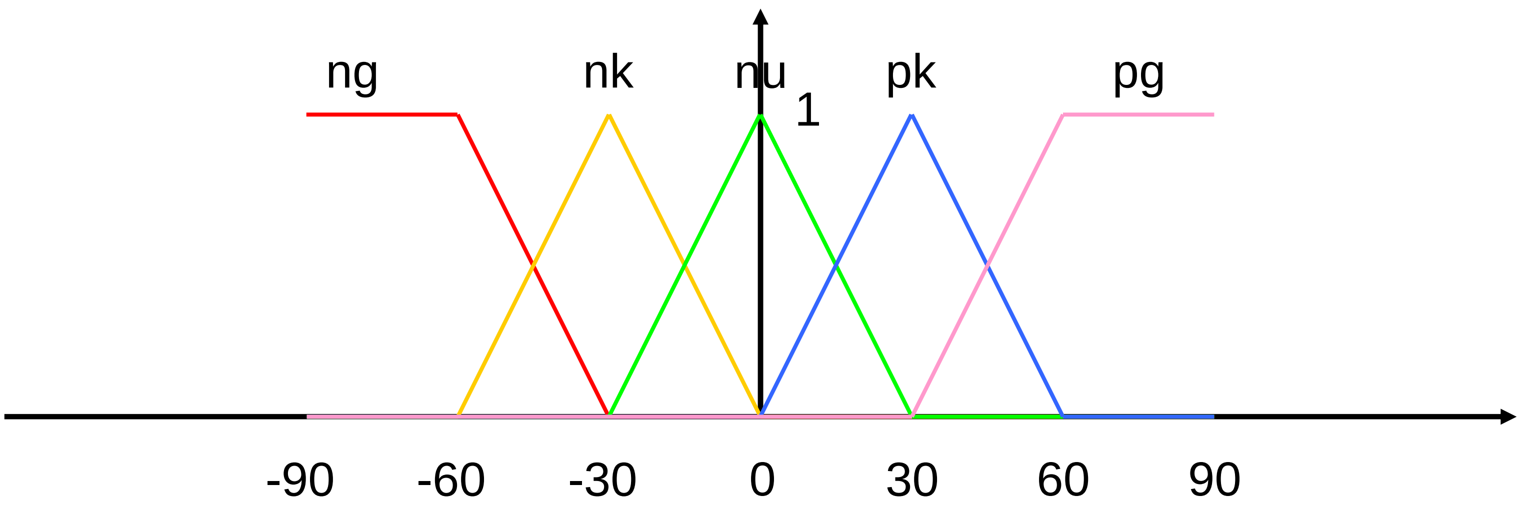
$M_1 \Longrightarrow X_1 = [-90, +90]$ Grad

$M_2 \Longrightarrow X_2 = [-45, +45]$ Grad/Sekunde

$F \Longrightarrow Y = [-10, +10]$ Newton

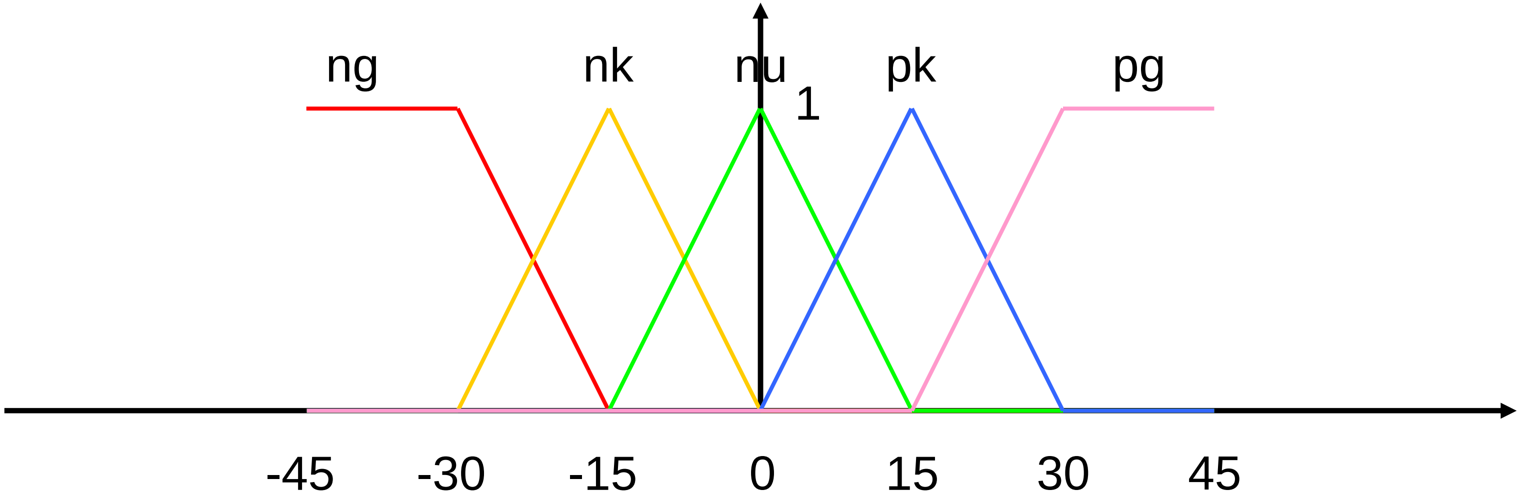
Unscharfe Mengen

M_1



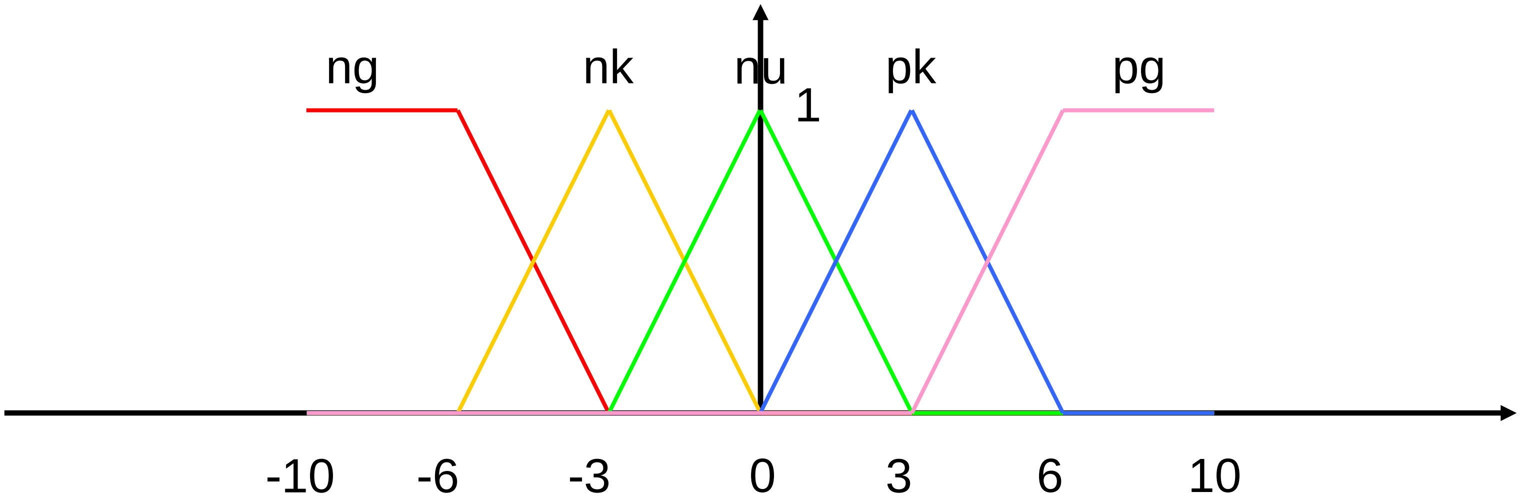
Unscharfe Mengen

M_2



Unscharfe Mengen

F



Regeln

F		M_1				
		ng	nk	nu	pk	pg
	ng			ng		
	nk		nk	nk		
M_2	nu	ng	nk	nu	pk	pg
	pk			pk	pk	
	pg			pg		

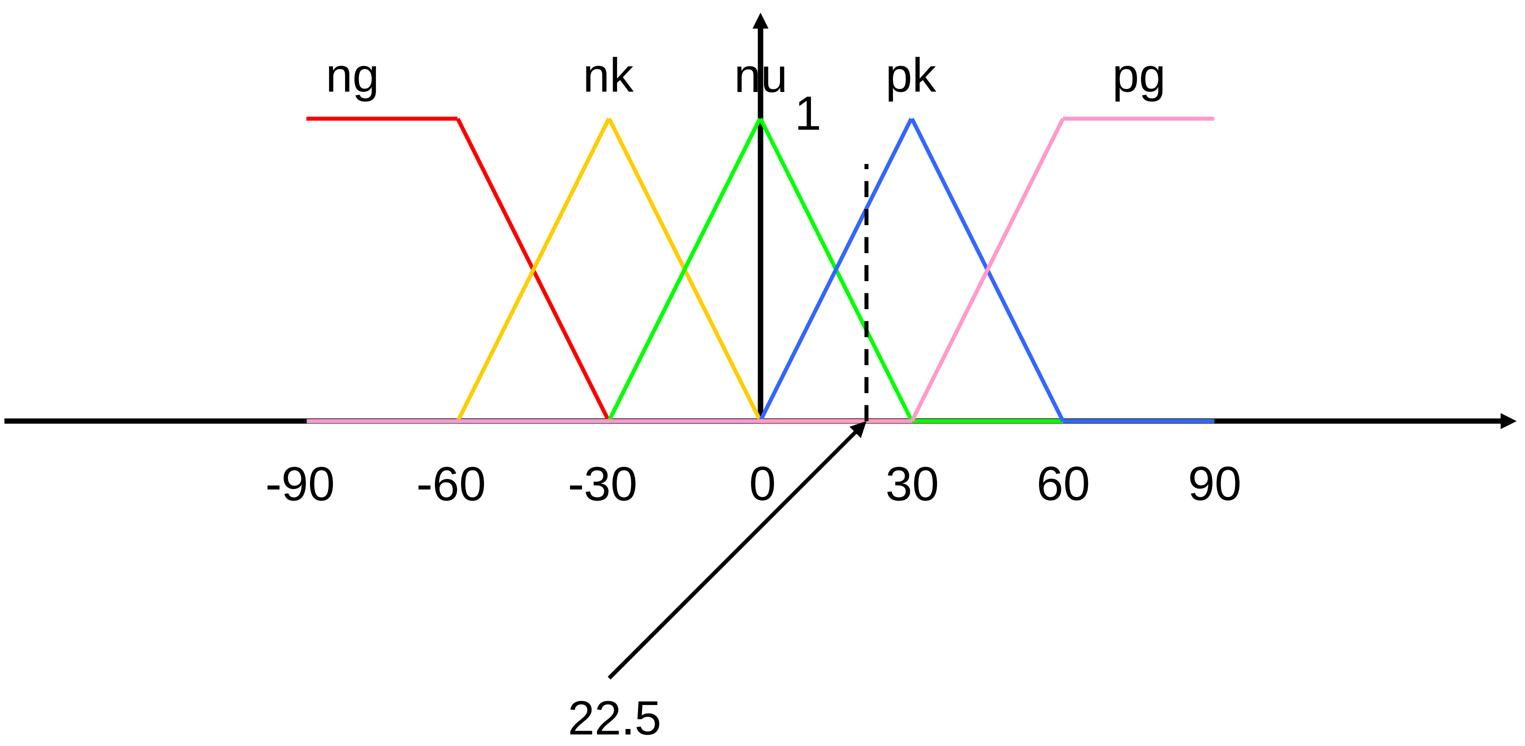
Eingabe Meßwerte

$$x_1 = 22.5$$

$$x_2 = 0$$

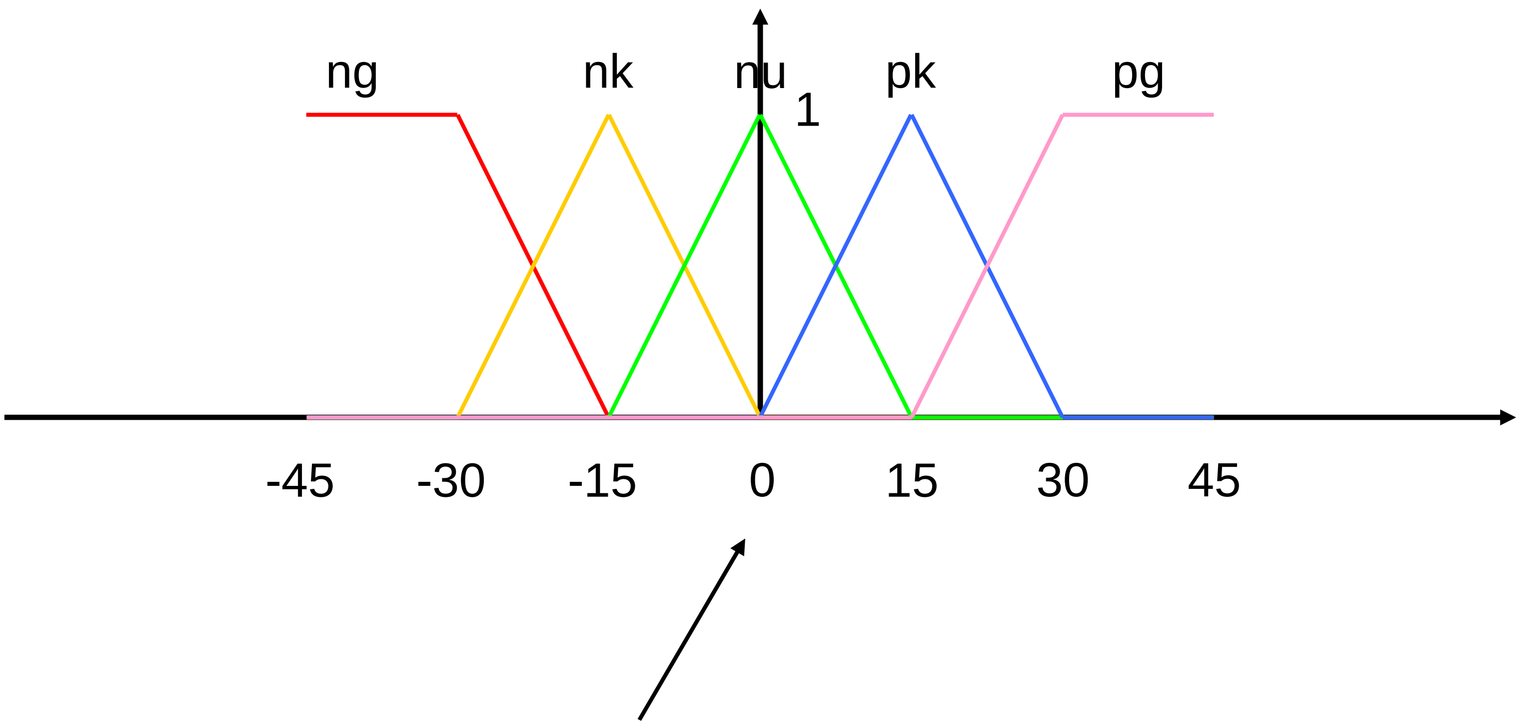
Unscharfe Mengen

M_1



Unscharfe Mengen

M_2



Eingabe Meßwerte

$x_1 = 22.5$ ⟹ M_1 ist nu

pk

$x_2 = 0$ ⟹ M_2 ist nu

anwendbare Regeln

Regel 1:

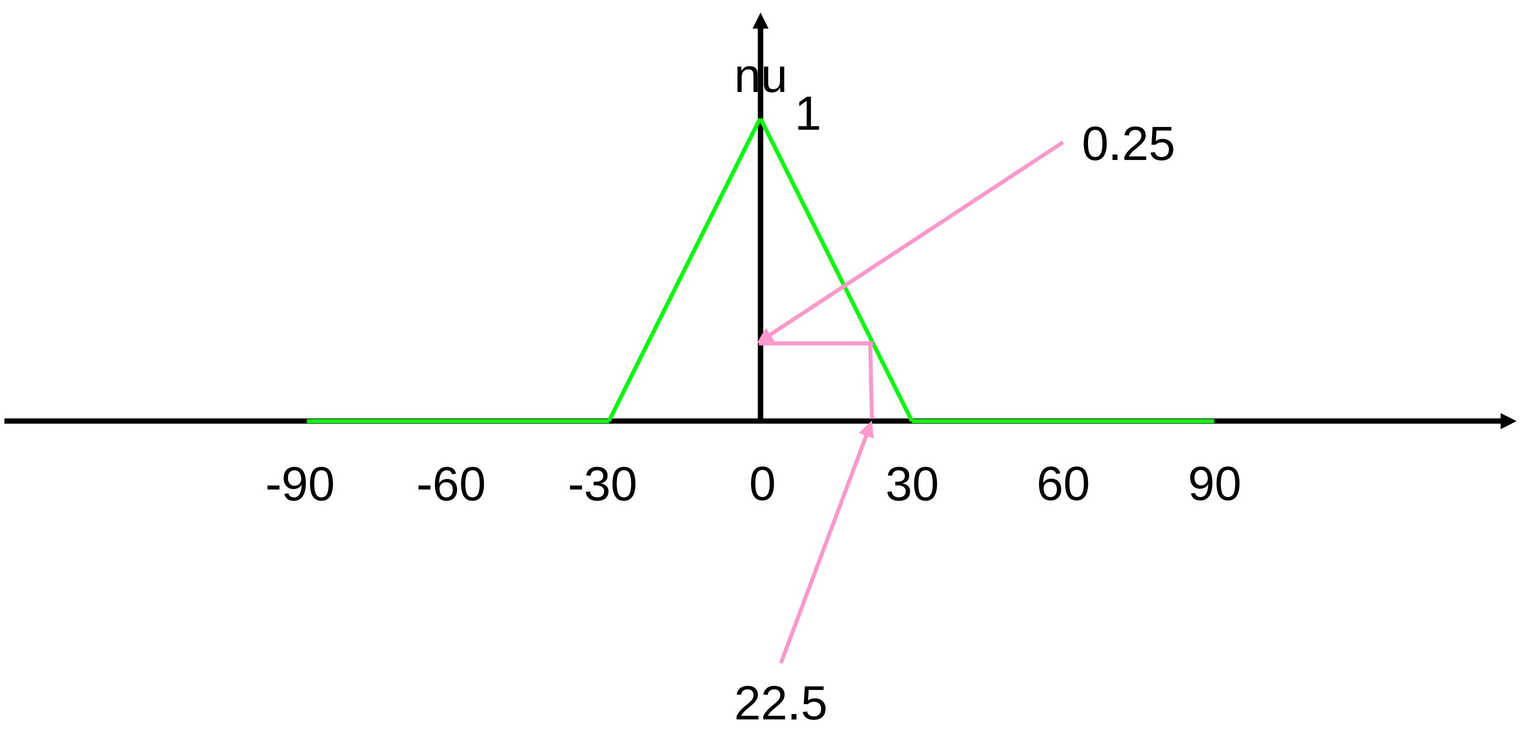
M_1	ist	nu	$\Rightarrow$	F	ist	nu
M_2	ist	nu				

Regel 2:

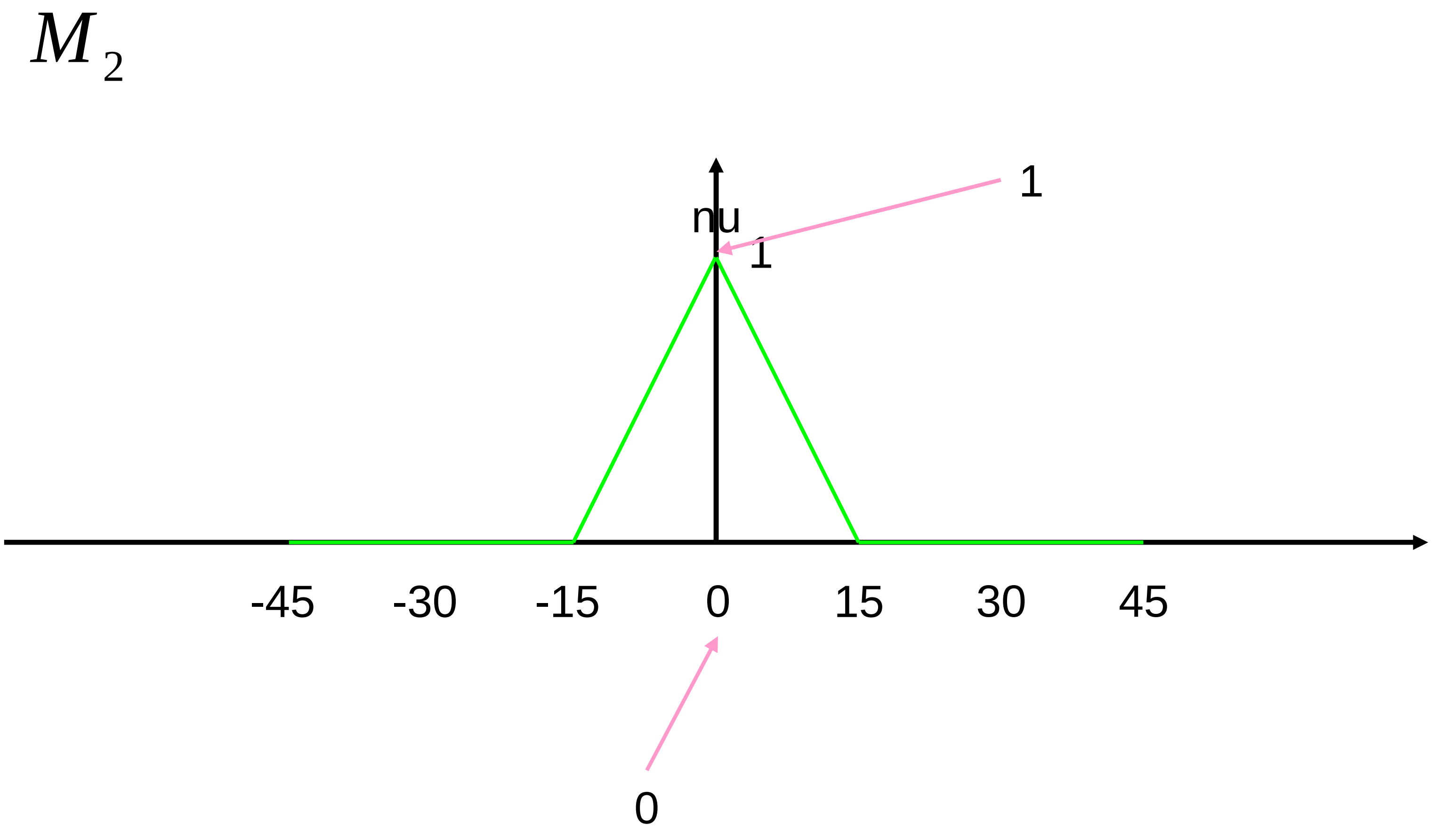
M_1	ist	pk	$\Rightarrow$	F	ist	pk
M_2	ist	nu				

Regel 1

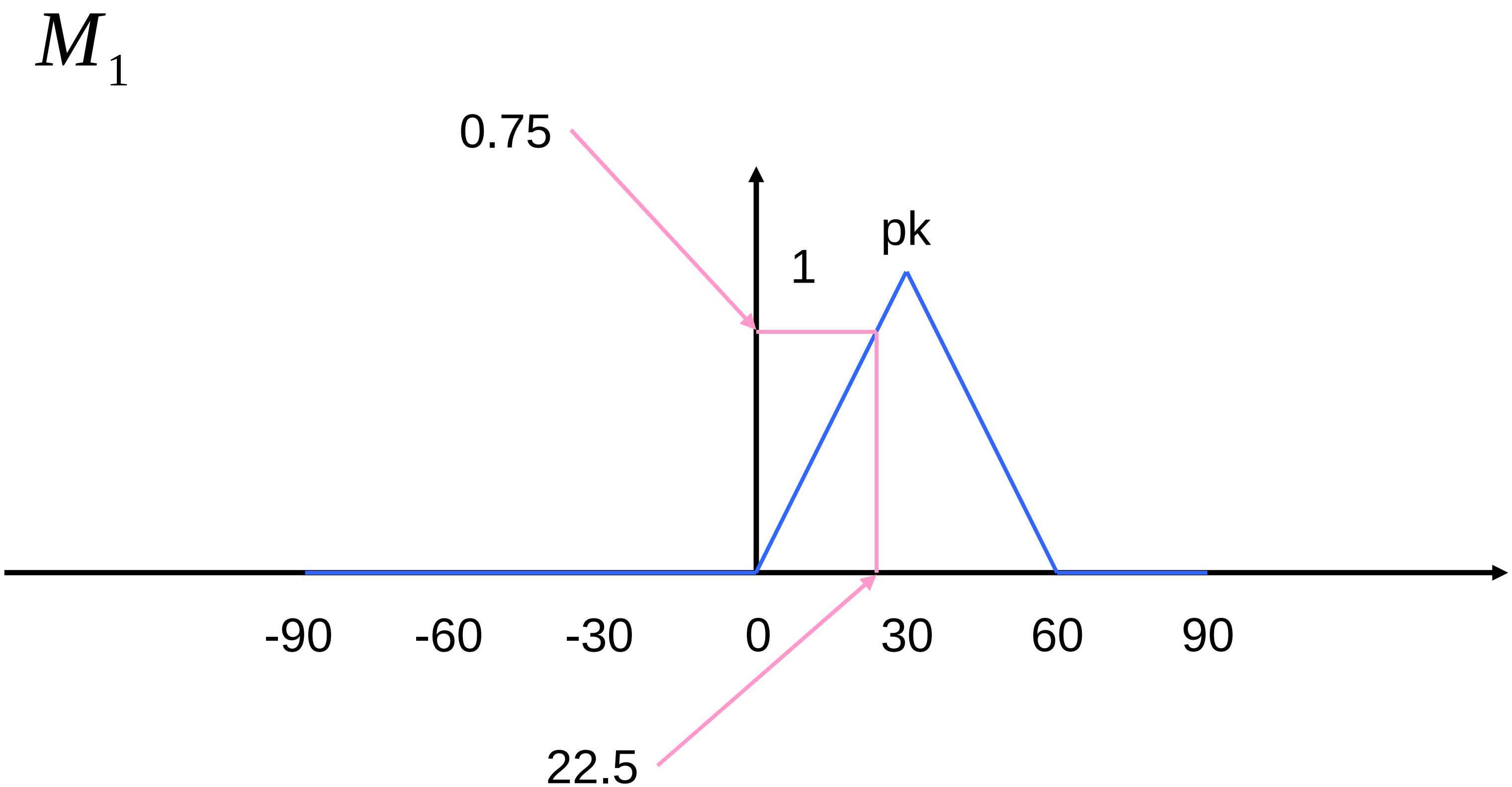
M_1



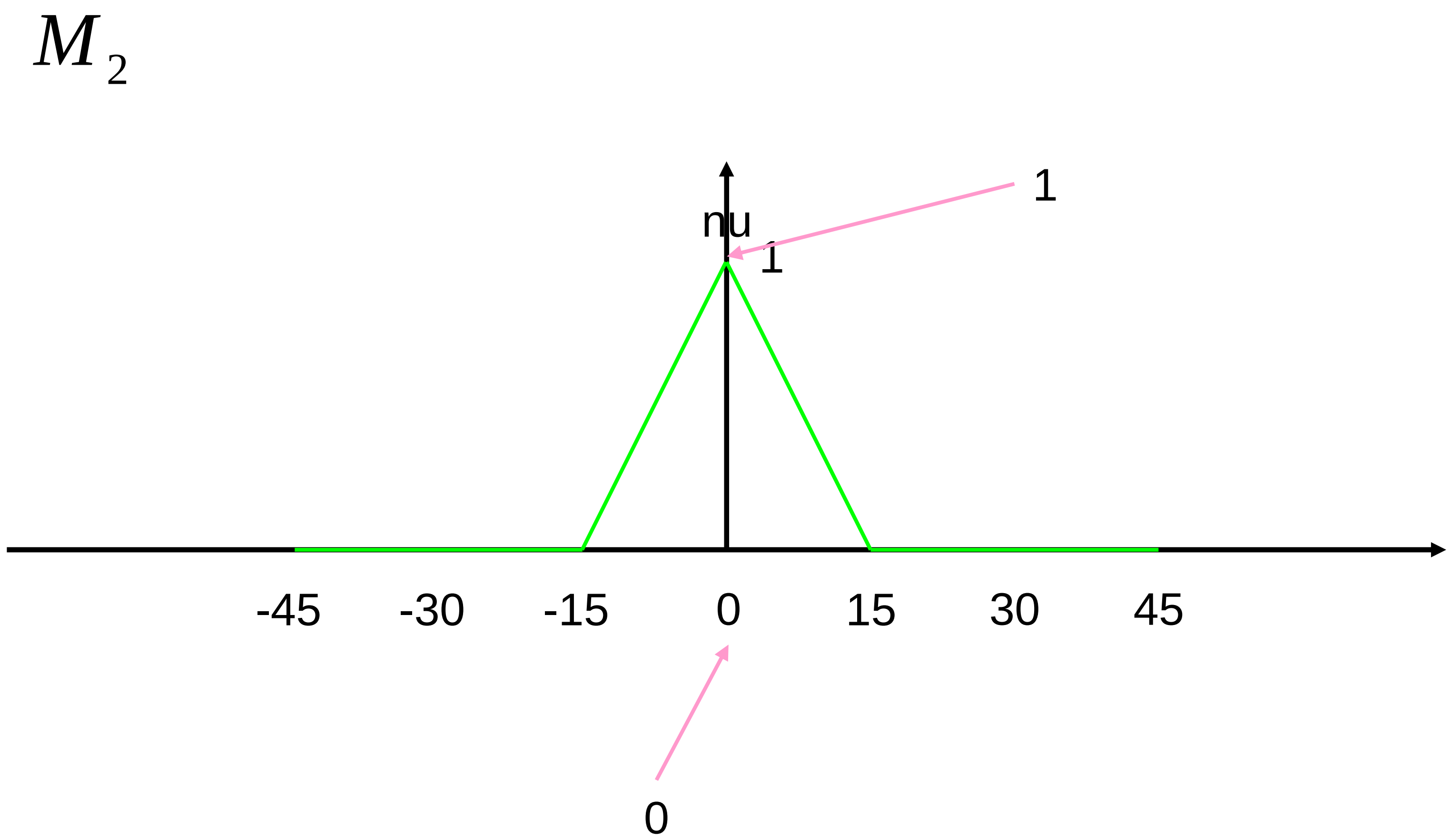
Regel 1



Regel 2



Regel 2

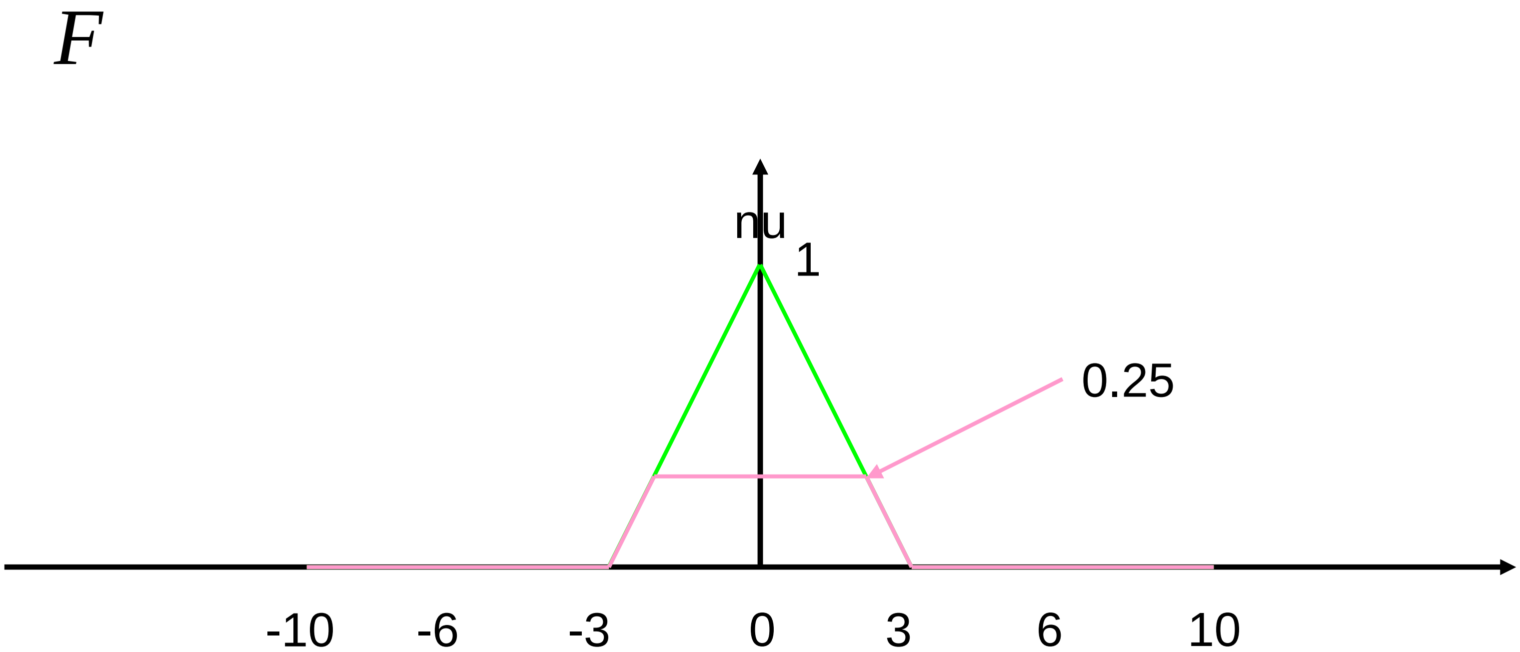


Schlussfolgerung

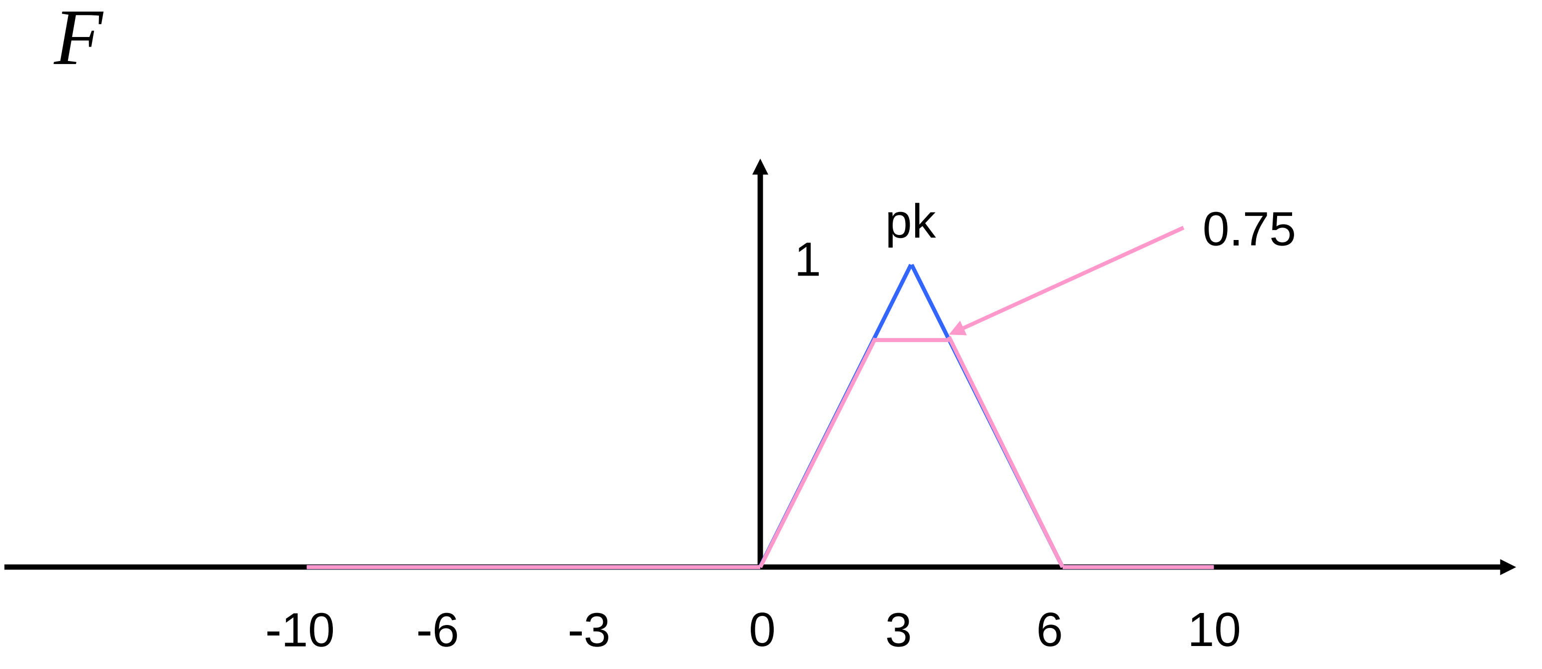
Prämisse Regel 1: $\boxed{0.25} = \min\{0.25, 1\}$

Prämisse Regel 2: $\boxed{0.75} = \min\{0.75, 1\}$

Kraft nach Regel 1

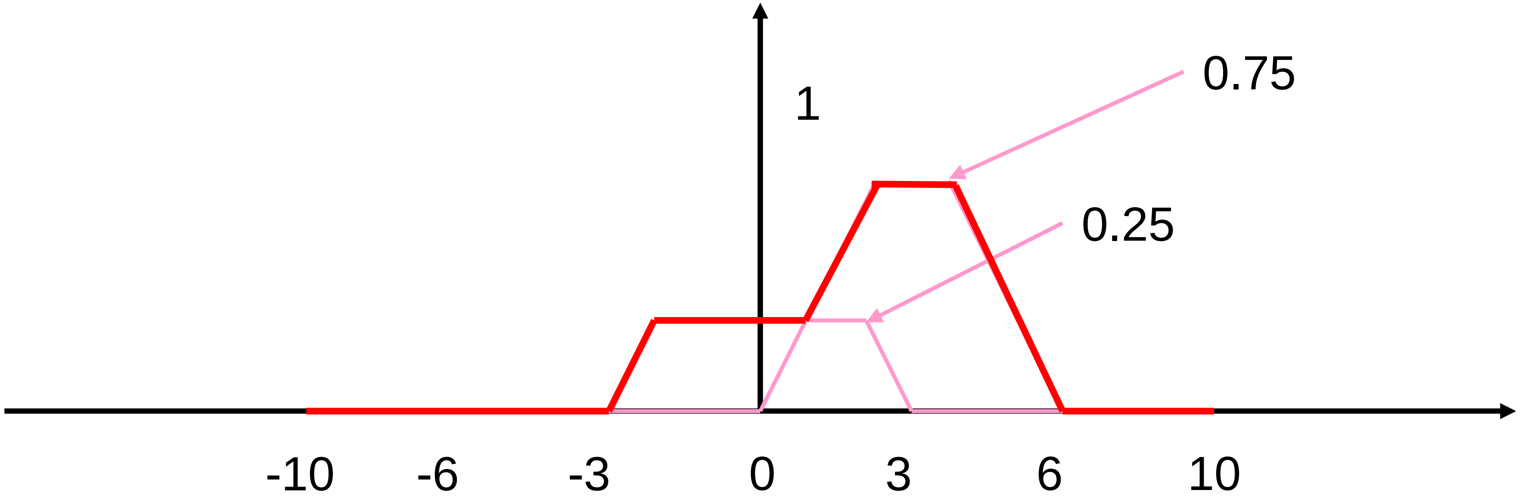


Kraft nach Regel 2



Kraft gesamt (Vereinigung)

F



Defuzzyfizierung (Schwerpunkt): $\Rightarrow$ $\boxed{F \approx 2}$