Übung 3 – Globale Operationen

Aufgabe 1

$i = \sqrt{-1}$

$$B^{(u,v)} = \left(e^{2\pi i \left(\frac{iu}{I} + \frac{jv}{J} \right)} \right)$$

$u = 0,\ldots, I-1, \; v = 0,\ldots, J-1$

$i = 0,\ldots, I-1, \; j = 0,\ldots, J-1$

Basismatrizen

Zeigen Sie: $I = J = 4$ $\Rightarrow$ $B(i,j)^{(u,v)} \in \{1, -1, i, -i\}$

Aufgabe 1

$$B^{(u,v)} = \left(e^{2\pi i\left(\frac{iu}{I}+\frac{jv}{J}\right)} \right)$$

$$u = 0,\dots, I-1,\;\; v = 0,\dots, J-1$$

$$i = 0,\dots, I-1,\;\; j = 0,\dots, J-1$$

$$I = J = 4 \qquad B^{(u,v)} = \left(e^{\frac{\pi}{2} i (iu+jv)} \right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{\frac{\pi}{2} i (iu+jv)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}(iu+jv)\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}(iu+jv)\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(iu+jv)\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}(iu+jv)\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \mathrm{iu}+\mathrm{jv} \equiv 0 \bmod 4 \\ i & \text{falls} \quad \mathrm{iu}+\mathrm{jv} \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{falls} \quad \mathrm{iu}+\mathrm{jv} \equiv 2 \bmod 4 \\ -i & \text{falls} \quad \mathrm{iu}+\mathrm{jv} \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

Aufgabe 2

$$I = J = 4$$

Berechnen Sie: $B^{(0,0)}$

$B^{(0,1)}$

$B^{(1,1)}$

$B^{(2,2)}$

Aufgabe 2

$$B^{(u,v)} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2} i (iu + jv)} \end{pmatrix} \qquad u = 0,\ldots,3,\; v = 0,\ldots,3 \qquad i = 0,\ldots,3,\; j = 0,\ldots,3$$

$$e^{\frac{\pi}{2} i (iu + jv)} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \mathrm{iu} + \mathrm{jv} \equiv 0 \bmod 4 \\ i & \text{falls} \quad \mathrm{iu} + \mathrm{jv} \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{falls} \quad \mathrm{iu} + \mathrm{jv} \equiv 2 \bmod 4 \\ -i & \text{falls} \quad \mathrm{iu} + \mathrm{jv} \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

$$B^{(0,0)} \Rightarrow iu + vj = 0 \Rightarrow B^{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$B^{(u,v)} = \left(e^{\frac{\pi}{2} i (iu + jv)} \right) \qquad e^{\frac{\pi}{2} i (iu + jv)} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \mathrm{iu} + \mathrm{jv} \equiv 0 \bmod 4 \\ i & \text{falls} \quad \mathrm{iu} + \mathrm{jv} \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{falls} \quad \mathrm{iu} + \mathrm{jv} \equiv 2 \bmod 4 \\ -i & \text{falls} \quad \mathrm{iu} + \mathrm{jv} \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

$$B^{(0,1)} \Rightarrow iu + vj = j \Rightarrow B^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$B^{(1,1)} \Rightarrow iu + vj = i + j \Rightarrow B^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ -i & 1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$B^{(u,v)} = \left(e^{\frac{\pi}{2} i (iu + jv)} \right) \qquad e^{\frac{\pi}{2} i (iu + jv)} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \mathrm{iu + jv} \equiv 0 \bmod 4 \\ i & \text{falls} \quad \mathrm{iu + jv} \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{falls} \quad \mathrm{iu + jv} \equiv 2 \bmod 4 \\ -i & \text{falls} \quad \mathrm{iu + jv} \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

$$B^{(2,2)} \Rightarrow iu + vj = 2(i + j) \Rightarrow B^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$I = J = 4$$

Überprüfen Sie: $\left\langle B^{(1,1)}, B^{(1,1)} \right\rangle = 1$

$$\left\langle B^{(1,1)}, B^{(2,2)} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle S, T \right\rangle = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot t^*(i,j)$$

Skalarprodukt (→ $\left\langle S, T \right\rangle$)

konjugiert komplexe Zahl (→ t^*)

Aufgabe 3

$$\langle S,T\rangle = \frac{1}{I\cdot J}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J-1} s(i,j)\cdot t^*(i,j)$$

$$B^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ -i & 1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle B^{(1,1)}, B^{(1,1)}\rangle = \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} b(i,j)^{(1,1)}\cdot\left(b(i,j)^{(1,1)}\right)^*$$

$$\langle B^{(1,1)}, B^{(1,1)}\rangle = \frac{1}{16}(1+i\cdot(-i)+1+(-i)\cdot i+\ldots) = \frac{1}{16}(4+4+4+4) = 1$$

Aufgabe 3

$$\langle S,T\rangle = \frac{1}{I\cdot J}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J-1} s(i,j)\cdot t^*(i,j)$$

$$B^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ -i & 1 & i & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle B^{(1,1)}, B^{(2,2)}\rangle = \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} b(i,j)^{(1,1)}\cdot\left(b(i,j)^{(2,2)}\right)^*$$

$$\langle B^{(1,1)}, B^{(2,2)}\rangle = \frac{1}{16}\left[(1-i-1+i)+(-i-1+i+1)+(-1+i+1-i)+(i+1-i-1)\right] = 0$$

Aufgabe 3 – allgemein

$$\left\langle B^{(u_1,v_1)}, B^{(u_2,v_2)} \right\rangle = \begin{cases} 0 & falls \; (u_1,v_1) \neq (u_2,v_2) \\ 1 & \; (u_1,v_1) = (u_2,v_2) \end{cases}$$

Aufgabe 4

$$I = J = 4$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation:

$$F = \mathrm{FT}(S) = (f(u,v)) \qquad u = 0,\ldots,3,\; v = 0,\ldots,3$$

Aufgabe 4

$$S = (s(i,j)) \qquad F = (f(u,v))$$

$$f(u,v) = \left\langle S, B^{(u,v)} \right\rangle = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)}$$

$$s(i,j) = \sum_{u=0}^{I-1} \sum_{v=0}^{J-1} f(u,v) \cdot e^{2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)}$$

inverse FT

Aufgabe 4

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B^{(0,0)}$$

$$f(u,v) = \left\langle S, B^{(u,v)} \right\rangle = \left\langle B^{(0,0)}, B^{(u,v)} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad u = v = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

$I = J = 4$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformationen:

$$F_1 = \mathrm{FT}(S_1) = (f_1(u,v)) \qquad F_2 = \mathrm{FT}(S_2) = (f_2(u,v))$$

$$u = 0,\ldots,3, \; v = 0,\ldots,3$$

Welche Eigenschaft haben die beiden FT gemeinsam?

Aufgabe 5

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1(u,v) = \left\langle S_1, B^{(u,v)} \right\rangle = \frac{1}{16}\left(1 \cdot \left(b(0,0)^{(u,v)}\right)^*\right) = \frac{1}{16}(1 \cdot 1) = \frac{1}{16}$$

$$F_1 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b(1,1)^{(u,v)} = e^{\frac{\pi}{2} i (u+v)}$$

$$f_2(u,v) = \left\langle S_2, B^{(u,v)} \right\rangle = \frac{1}{16}\left(1 \cdot \left(b(1,1)^{(u,v)}\right)^*\right) = \frac{1}{16} e^{-\frac{\pi}{2} i (u+v)} = \frac{1}{16} e^{\frac{\pi}{2} i (-u+-v)}$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Verschiebung}} S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\left| f_1(u,v) \right| = \left| f_2(u,v) \right| = \frac{1}{16}$

Aufgabe 6

$$I = J = 4$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation:

$$F = \mathrm{FT}(S) = (f(u,v)) \qquad u = 0,\ldots,3,\; v = 0,\ldots,3$$

Aufgabe 6

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = B^{(0,0)} + B^{(2,2)} \qquad \mathrm{FT}(S) = \mathrm{FT}(B^{(0,0)}) + \mathrm{FT}(B^{(2,2)}) = F_1 + F_2$$

$$f_1(u,v) = \left\langle B^{(0,0)}, B^{(u,v)} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad u = v = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

$$\mathrm{FT}(S) = \mathrm{FT}(B^{(0,0)}) + \mathrm{FT}(B^{(2,2)}) = F_1 + F_2$$

$$f_2(u,v) = \left\langle B^{(2,2)}, B^{(u,v)} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad u = v = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{FT}(S) = \mathrm{FT}(B^{(0,0)}) + \mathrm{FT}(B^{(2,2)}) = F_1 + F_2$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{FT}(S) = F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

$$I = J = 4$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die inverse Fouriertransformation:

$$S = \mathrm{FT}^{-1}(F) = (s(i, j)) \qquad i = 0,\ldots,3, \quad j = 0,\ldots,3$$

Aufgabe 7

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s(i,j) = \sum_{u=0}^{I-1} \sum_{v=0}^{J-1} f(u,v) \cdot e^{2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)}$$

$$s(i,j) = f(1,1) \cdot e^{\frac{\pi}{2} i (i+j)} = e^{\frac{\pi}{2} i (i+j)}$$

siehe Aufgabe 2

$$S = B^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ -i & 1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

$$I = J = 4$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation:

$$F = \mathrm{FT}(S) = (f(u,v)) \qquad u = 0,\ldots,3,\ v = 0,\ldots,3$$

Aufgabe 8

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = B^{(0,1)} + B^{(0,3)}$$

(Aufgabe 2)

$$\mathrm{FT}(S) = \mathrm{FT}(B^{(0,1)}) + \mathrm{FT}(B^{(0,3)}) = F_1 + F_2$$

$$f_1(u,v) = \left\langle B^{(0,1)}, B^{(u,v)} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad u = 0, v = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

$$\mathrm{FT}(S) = \mathrm{FT}(B^{(0,1)}) + \mathrm{FT}(B^{(0,3)}) = F_1 + F_2$$

$$f_2(u,v) = \left\langle B^{(0,3)}, B^{(u,v)} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad u = 0, v = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{FT}(S) = \mathrm{FT}(B^{(0,1)}) + \mathrm{FT}(B^{(0,3)}) = F_1 + F_2$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{FT}(S) = F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

$$I = J = 4$$

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation:

$$F = \mathrm{FT}(S) = (f(u,v)) \qquad u = 0,\ldots,3,\ v = 0,\ldots,3$$

Aufgabe 9

$$S=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0 & -2\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -4 & -2\\ 2 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix}1 & i & -1 & -i\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -i & -1 & i\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ i & i & i & i\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ -i & -i & -i & -i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -i & -i & -i & -i\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ i & i & i & i\end{pmatrix}$$

$$S=(B^{(0,1)}+B^{(0,3)})+(B^{(1,0)}+B^{(3,0)})$$

Aufgabe 9

$$S = (B^{(0,1)} + B^{(0,3)}) + (B^{(1,0)} + B^{(3,0)})$$

$$\mathrm{FT}(S) = \mathrm{FT}(B^{(0,1)} + B^{(0,3)}) + \mathrm{FT}(B^{(1,0)} + B^{(3,0)})$$

$$\mathrm{FT}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

$S = (s(i,j)) \qquad s(i,j)$ - reell

Zeige:

$$f^*(u,v) = f(-u,-v)$$

Aufgabe 10

$$f(u,v)=\frac{1}{I\cdot J}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J-1}s(i,j)\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{i\cdot u}{I}+\frac{j\cdot v}{J}\right)}$$

$$f^*(u,v)=\frac{1}{I\cdot J}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J-1}s^*(i,j)\cdot e^{2\pi i\left(\frac{i\cdot u}{I}+\frac{j\cdot v}{J}\right)}$$

$$f(-u,-v)=\frac{1}{I\cdot J}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J-1}s(i,j)\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{i\cdot(-u)}{I}+\frac{j\cdot(-v)}{J}\right)}=\frac{1}{I\cdot J}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J-1}s(i,j)\cdot e^{2\pi i\left(\frac{i\cdot u}{I}+\frac{j\cdot v}{J}\right)}.$$

$s^*(i,j)=s(i,j)$ ⇒ $f^*(u,v)=f(-u,-v).$

Aufgabe 11

$S = (s(i, j))$ $\quad s(i, j)$ - imaginär

Zeige:

$$f^*(-u,-v) = -f(u,v)$$

Aufgabe 11

$$f(u,v) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)}$$

$$f^*(-u,-v) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s^*(i,j) \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)} = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} -s(i,j) \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)}$$

$$= -\frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)} = -f(u,v).$$

Aufgabe 12

Berechnen Sie die Fouriertransformation einer Basismatrix:

$$B^{(a,b)} \quad 0 \leq a < I \quad 0 \leq b < J$$

Aufgabe 12

$$F = \mathrm{FT}(B^{(a,b)}) = (f(u,v))$$

$$f(u,v) = \left\langle B^{(a,b)}, B^{(u,v)} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad u = a, v = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 13

Zeigen Sie, dass die Basismatrizen

$$B^{(u,v)} \quad 0 \leq u < I \quad 0 \leq v < J$$

linear unabhängig und orthonormoiert sind.

Aufgabe 14

siehe Buch

Aufgabe 15 – Faltungssatz

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfe:

$$\mathrm{FT}(S_1 * S_2) = \mathrm{FT}(S_1) \cdot \mathrm{FT}(S_2)$$

Aufgabe 15

$$\mathrm{FT}(S_1 * S_2) = \mathrm{FT}(S_1) \cdot \mathrm{FT}(S_2)$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = S_1 * S_2$$

$$g(i, j) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{k=0}^{I-1} \sum_{l=0}^{J-1} s_1(k,l) \cdot s_2(i-k, j-l)$$

$$G = S_1 * S_2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15

$$\mathrm{FT}(S_1 * S_2) = \mathrm{FT}(S_1) \cdot \mathrm{FT}(S_2)$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Aufgabe 5a) (Aufgabe 4)

$$S_1 * S_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Aufgabe 4)

$$\mathrm{FT}(S_1 * S_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \cdot F_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation (FFT):

$$F_1 = \mathrm{FT}(S_1) = (f_1(u,v)) \qquad u = 0,\ldots,3,\; v = 0,\ldots,3$$

$$F_2 = \mathrm{FT}(S_2) = (f_2(u,v))$$

Schnelle Fouriertransformation – FFT

$$f(k) = \sum_{t=0}^{N-1} g(t) \cdot e^{-2\pi i \frac{k \cdot t}{N}}$$

$$N = 2^p \qquad W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

$$f(k) = f_1(k) + W_N^k f_2(k) \qquad k < \frac{N}{2}$$

$$f(k) = f_1\left(k - \frac{N}{2}\right) + W_N^k f_2\left(k - \frac{N}{2}\right) \qquad \frac{N}{2} - 1 < k \leq N - 1$$

N=4

$$f(k) = f_1(k) + W_4^k f_2(k)$$

$$k < \frac{N}{2} = 2, \quad k = 0,1$$

$$f(k) = f_1(k-2) + W_4^k f_2(k-2)$$

$$\frac{N}{2} - 1 < k \le N - 1$$

$$k = 2,3$$

N=4

$$f_1(k) = \sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2t) \cdot W_{\frac{N}{2}}^{tk} = \sum_{t=0}^{1} g(2t) \cdot W_2^{tk}$$

$$f_1(0) = \sum_{t=0}^{1} g(2t) \cdot W_2^{t \cdot 0} = g(0) + g(2)$$

$$f_1(1) = \sum_{t=0}^{1} g(2t) \cdot W_2^{t \cdot 1} = g(0) - g(2)$$

$$f_2(k) = \sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2t+1) \cdot W_{\frac{N}{2}}^{tk} = \sum_{t=0}^{1} g(2t+1) \cdot W_2^{tk}$$

$$f_2(0) = \sum_{t=0}^{1} g(2t+1) \cdot W_2^{t \cdot 0} = g(1) + g(3)$$

$$f_2(1) = \sum_{t=0}^{1} g(2t+1) \cdot W_2^{t \cdot 1} = g(1) - g(3)$$

N=4

$$f(k) = f_1(k) + W_4^k f_2(k)$$

$$f(k) = f_1(k-2) + W_4^k f_2(k-2)$$

$k = 0,1$

$k = 2,3$

$$W_4 = e^{-\frac{2\pi i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$$

$$W_4^2 = -1$$

$$W_4^3 = i$$

$$f(0) = f_1(0) + f_2(0) = g(0) + g(2) + g(1) + g(3)$$

$$f(1) = f_1(1) + W_4 \cdot f_2(1) = g(0) - g(2) - i(g(1) - g(3))$$

$$f(2) = f_1(0) + W_4^2 f_2(0) = g(0) + g(2) - g(1) - g(3)$$

$$f(3) = f_1(1) + W_4^3 \cdot f_2(1) = g(0) - g(2) + i(g(1) - g(3))$$

Aufgabe 16

$$f(0) = g(0) + g(2) + g(1) + g(3)$$

$$f(1) = g(0) - g(2) - i(g(1) - g(3))$$

$$f(2) = g(0) + g(2) - g(1) - g(3)$$

$$f(3) = g(0) - g(2) + i(g(1) - g(3))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilen Spalten Division durch 16

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$