Übersicht der Vorlesung

1. Einführung
2. Bildverarbeitung
3. Morphologische Operationen
4. Bildsegmentierung
5. Merkmale von Objekten
6. Klassifikation
7. Dreidimensionale Bildinterpretation
8. Bewegungsanalyse aus Bildfolgen
9. PCA (Hauptkomponentenanalyse)
10. ICA (Independent Component Analysis – Unabhängigkeitsanalyse)

2.4 Globale Operationen

Globale Operationen

- behandeln nur die Fouriertransformation
- weitere wichtige Transformation sind:
  - Wavelets
  - Gabor Transformation

2.4.1 Grundidee

Grundidee

- Objekt (Problem) X in ein anderes Objekt (Problem) Y transformieren
- dort bearbeiten (oft einfacher)
- zurück transformieren
- bei Bildern benutzt man die Fouriertransformation
- neues Objekt – Frequenzbild

Beispiel

Problem: $$X \cdot Y$$

Transformation:

$$X \rightarrow \log X = X_T$$

$$Y \rightarrow \log Y = Y_T$$

neues Problem (Addition): $$X_T + Y_T = Z_T$$

Rücktransformation: $$Z_T \rightarrow Z = X \cdot Y$$

2.4.2 Diskrete zweidimensionale Fouriertransformation

Raum aller Matrizen

Q_{IJ} - Menge aller $I \cdot J$ - Matrizen

$$\boxed{A \in Q_{IJ} \Rightarrow A = (a(i,j))}$$

$i = 0, \ldots, I-1 \quad j = 0, \ldots, J-1$

$a(i,j) \in C$

komplexe Zahlen

$z \in C \Rightarrow z = a + bi \qquad i = \sqrt{-1}$

Rechenoperationen

Addition:

$$S = (s(i,j)) \qquad T = (t(i,j)) \;\rightarrow\; S + T = (s(i,j) + t(i,j))$$

Multiplikation:

$$a \in C \qquad S = (s(i,j)) \;\rightarrow\; a \cdot S = (a \cdot s(i,j))$$

Skalarprodukt:

$$\boxed{\left\langle S,T \right\rangle = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot t^*(i,j)}$$

$$z = a + bi$$

$$z^* = a - bi$$

Basismatrizen - Linearkombination

$$B^{(u,v)} = \left(b(i,j)^{(u,v)}\right)$$

$u = 0,\ldots,I-1 \quad v = 0,\ldots,J-1$

$M = I \cdot J$ - linear unabhängige Basismatrizen

$S = (s(i,j)) \in Q_{IJ}$

$$s(i,j) = \sum_{u=0}^{I-1}\sum_{v=0}^{J-1} f(u,v) \cdot b(i,j)^{(u,v)}$$

$f(u,v) \in C$

orthonormierte Basis

$$\left\langle B^{(u_1,v_1)}, B^{(u_2,v_2)} \right\rangle = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} falls \begin{matrix} (u_1,v_1) \neq (u_2,v_2) \\ (u_1,v_1) = (u_2,v_2) \end{matrix}$$

Skalarprodukt

Eine orthonormierte Basis

$$B^{(u,v)} = \left(e^{2\pi i\left(\frac{iu}{I}+\frac{jv}{J}\right)} \right)$$

$u = 0,\ldots,I-1 \quad v = 0,\ldots,J-1$

$\sqrt{-1}$ Zeilenindex Spaltenindex

linear unabhängige und orthonormierte Basis im Raum Q_{IJ}

Beispiel

Sei *I* = *J* = *2*. Dann erhalten wir:

$$B^{(u,v)} = \left(e^{2\pi i\left(\frac{iu}{I}+\frac{jv}{J}\right)} \right)$$

$$B^{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 1 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

$$B^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diskrete zweidimensionale Fouriertransformation

FT

$$S = (s(i,j)) \qquad\qquad F = (f(u,v))$$

Bild

inverse FT

Frequenzbild

$$F = \mathrm{FT}(S)$$

$$B^{(u,v)} = \left(e^{2\pi i\left(\frac{iu}{I}+\frac{jv}{J}\right)} \right)$$

$$\boxed{s(i,j) = \sum_{u=0}^{I-1}\sum_{v=0}^{J-1} f(u,v)\cdot e^{2\pi i\left(\frac{i\cdot u}{I}+\frac{j\cdot v}{J}\right)}}$$

Basis

Diskrete zweidimensionale Fouriertransformation

FT

$$S = (s(i,j)) \qquad \rightleftarrows \qquad F = (f(u,v))$$

inverse FT

$$B^{(u,v)} = \left(e^{2\pi i \left(\frac{iu}{I} + \frac{jv}{J} \right)} \right)$$

Basis

$$\langle S, T \rangle = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot t^*(i,j)$$

Skalarprodukt

$$\boxed{f(u,v) = \left\langle S, B^{(u,v)} \right\rangle} \Rightarrow \boxed{f(u,v) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)}}$$

Diskrete zweidimensionale Fouriertransformation

$$S = (s(i,j)) \quad \underset{\text{inverse FT}}{\overset{\text{FT}}{\rightleftarrows}} \quad F = (f(u,v))$$

$$f(u,v) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)}$$

$$s(i,j) = \sum_{u=0}^{I-1} \sum_{v=0}^{J-1} f(u,v) \cdot e^{2\pi i \left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J} \right)}$$

Fouriertransformation – Beispiel

$$S = (s(i,j)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = (f(u,v)) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(0,0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{5}{2}$$

$$f(0,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{4}(1-2+3-4) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1,0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{4}(1+2-3-4) = -1$$

$$f(1,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{4}(1-2-3+4) = 0$$

Fouriertransformation – Erweiterung

$S' \in Q_{IJ}^{Z}$ $\quad\quad$ $S' = (s'(i,j))$ $\quad$ $i,j = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$

$$\boxed{s'(a \cdot I + i, b \cdot J + j) = s'(i,j)}$$

Funktionen (Matrizen) sind periodisch in *i*- und *j*-Richtung
mit den Perioden *I* und *J*.

periodische Fortsetzung

$$S \in Q_{IJ} \quad S = (s(i,j))$$

$$\Big\Downarrow \text{periodische Fortsetzung}$$

$$S' = (s'(i,j)) \in Q_{IJ}^{Z}$$

$$\boxed{s'(a \cdot I + i, b \cdot J + j) = s(i,j)}$$

Fouriertransformation – Erweiterung

$$S' = (s'(i,j)) \in Q_{IJ}^{Z}$$

$$S = (s(i,j)) \in Q_{IJ}$$

$$s(i,j) = s'(i,j)$$

FT - Erweiterung

FT

$$F' = (f'(u,v)) \in Q_{IJ}^{Z}$$

$$f'(a \cdot I + u, b \cdot J + v) = f(u,v)$$

$$F = (f(u,v))$$

periodische Fortsetzung

Eigenschaften

Periodizität: $$f(u,v) = f(u + a \cdot I, v + b \cdot J)$$

Symmetrie: $$\left| f(u,v) \right| = \left| f(-u,-v) \right| \quad \text{falls } s(i,j) \text{ reell}$$

Verschiebung: $$S = (s(i,j)) \in Q_{IJ}^{Z} \qquad S_V = (s_V(i,j)) \in Q_{IJ}^{Z}$$

$$s_V(i,j) = s(i - i_0, j - j_0)$$

$$f_V(u,v) = e^{-2\pi i \left(\frac{i_0 u}{I} + \frac{j_0 v}{J} \right)} \cdot f(u,v)$$

$$\boxed{\left| f_V(u,v) \right| = \left| f(u,v) \right|}$$

2.4.3 Anwendung der Fouriertransformation in der Bildverarbeitung

Anwendung in der Bildverarbeitung

$$G = (g(i, j)) \xrightarrow{\text{FT}} F = (f(u,v))$$

Bild — Frequenzbild

$$f(u,v) = p(u,v) + i \cdot t(u,v) \qquad |f(u,v)| = \sqrt{p^2(u,v) + t^2(u,v)}$$

- Die komplexen Zahlen *f(u, v) heißen Ortsfrequenzen und* |*f(u, v)*| heißt Fourierspektrum oder Spektrum der Ortsfrequenzen
- Manche Eigenschaften eines Bildes können mit Hilfe der Linearfaktoren *f(u, v)* besser erkannt werden
- Die Ortsfrequenzen charakterisieren periodische Wiederholungen im Ausgabebild

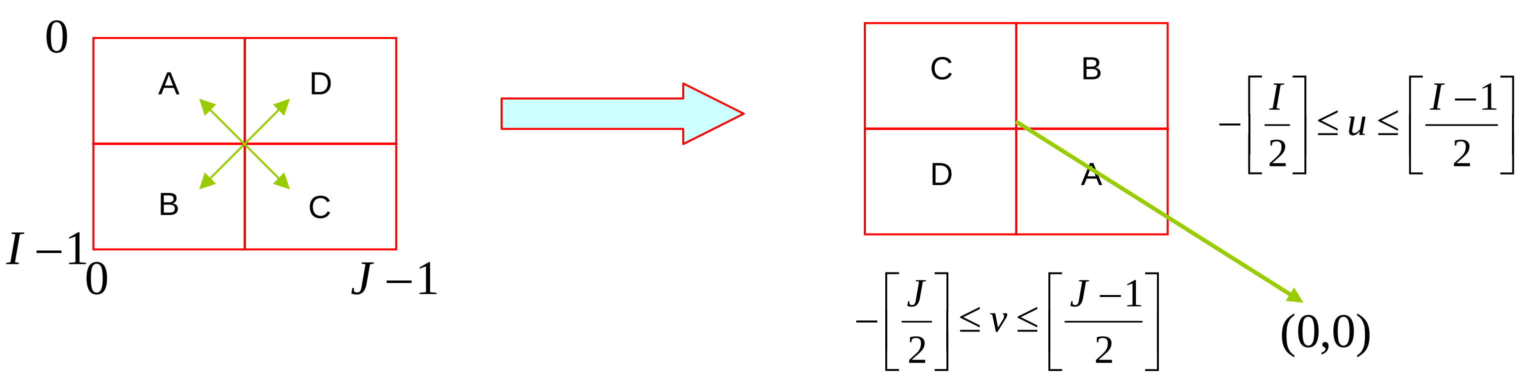
Darstellung des Spektrums

Eigenschaften: $f(u,v) = f(u + a \cdot I, v + b \cdot J)$

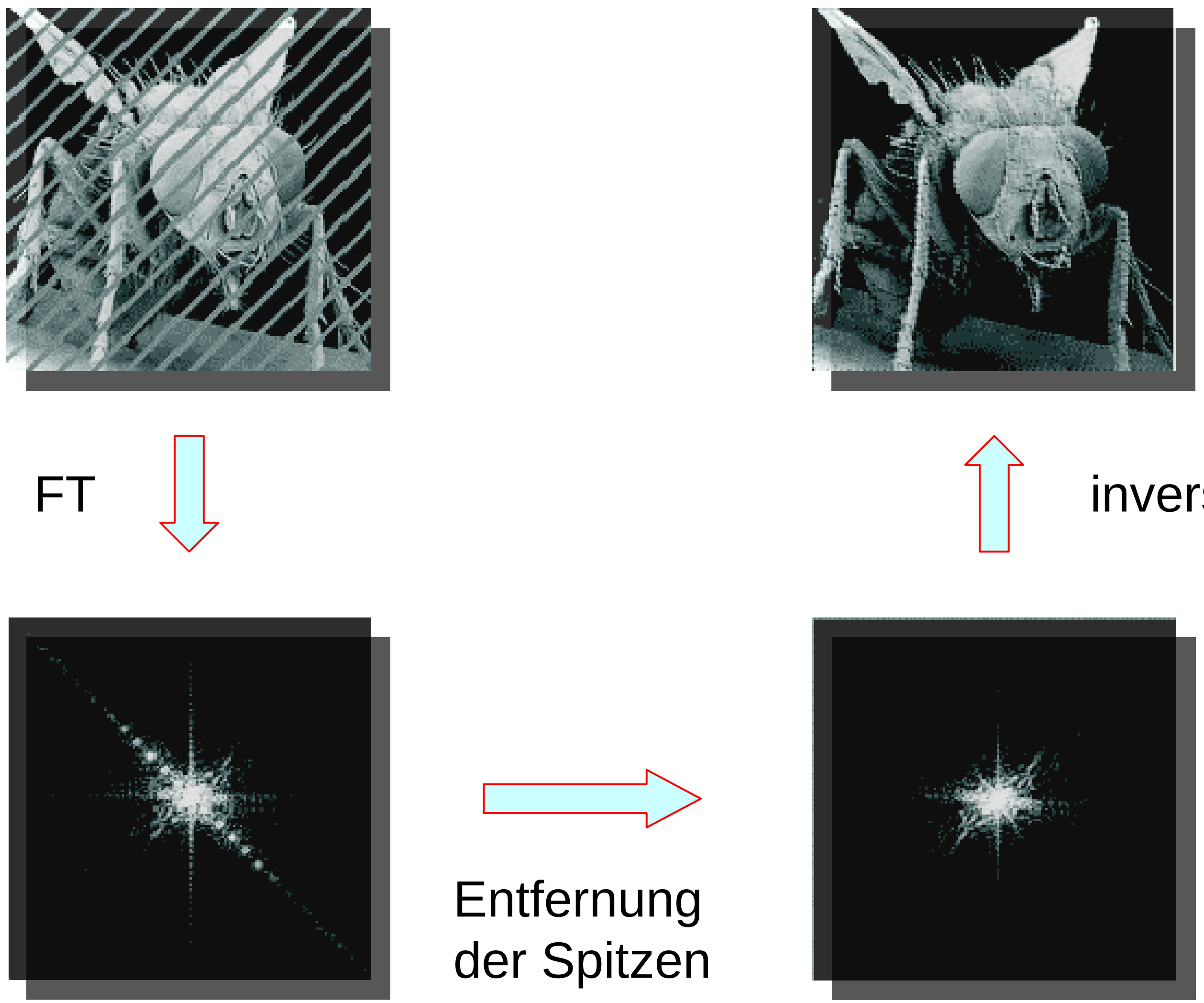
$$\left| f(u,v) \right| = \left| f(-u,-v) \right| \quad \text{falls } s(i,j) \text{ reell}$$

$$\left| f(u,v) \right| = \left| f(-u,-v) \right| = \left| f(I-u, J-v) \right| \quad \text{falls } s(i,j) \text{ reell}$$

Es ist üblich, den Koordinatenursprung (0,0) des Spektrums zentriert darzustellen.

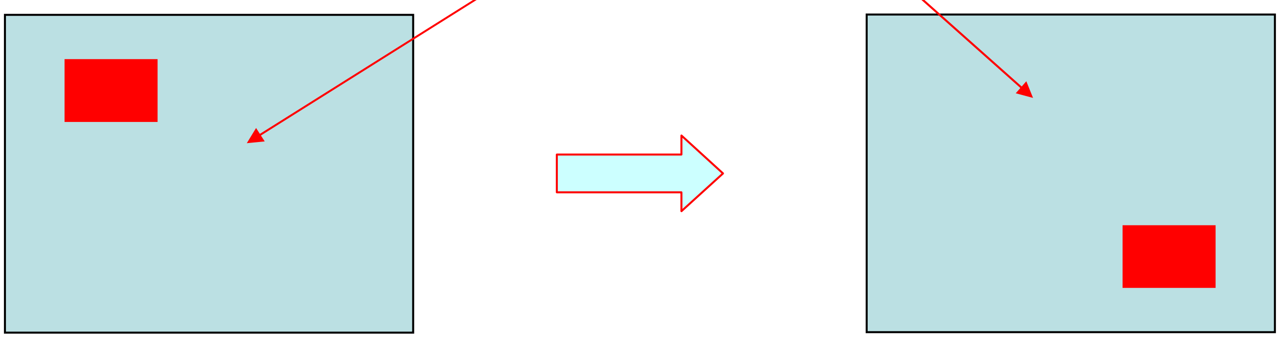


Entfernen von periodischen Bildstörungen



Verschiebung eines Objektes

$$\left| f_V(u,v) \right| = \left| f(u,v) \right|$$



2.4.4 Faltungssatz

Faltung

$$f, h \in Q_{IJ}^{Z}$$

$$\boxed{g(i,j) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{k=0}^{I-1} \sum_{l=0}^{J-1} f(k,l) \cdot h(i-k, j-1)}$$

$$g \in Q_{IJ}^{Z}$$

$$\boxed{g = f * h}$$

Die Faltung kann man als Multiplikation im Raum Q_{IJ}^{Z} auffassen

Faltungssatz

$f, h \in Q_{IJ}^{Z}$

$$\boxed{\mathrm{FT}(f * h) = \mathrm{FT}(f) \cdot \mathrm{FT}(h)}$$

Anwendung des Faltungssatzes

$$G_E = (g_E(i,j)) \in Q_{IJ}^Z \longrightarrow$$ Eingabebild

$$G_A = (g_A(i,j)) \in Q_{IJ}^Z \longrightarrow$$ Ausgabebild

$$K = (k(i,j)) \in Q_{IJ}^Z \longrightarrow$$ Impulsantwort

$$H = \mathrm{FT}(K) = (h(u,v)) \qquad F_E = \mathrm{FT}(G_E) = (f_E(u,v))$$

$$\boxed{G_A = K * G_E} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} G_A &= \mathrm{FT}^{-1}(\mathrm{FT}(K * G_E)) \\ &= \mathrm{FT}^{-1}(\mathrm{FT}(K) \cdot \mathrm{FT}(G_E)) \\ &= \mathrm{FT}^{-1}(H \cdot F_E) \end{aligned}}$$

Anwendung des Faltungssatzes

Man hat zwei Möglichkeiten, ein Bild zu manipulieren:

1. durch die Faltung mit der Impulsantwort *K*

$$G_A = K * G_E$$

$$g_A(i,j) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{k=0}^{I-1} \sum_{l=0}^{J-1} k(k,l) \cdot g_E(i-k, j-1)$$

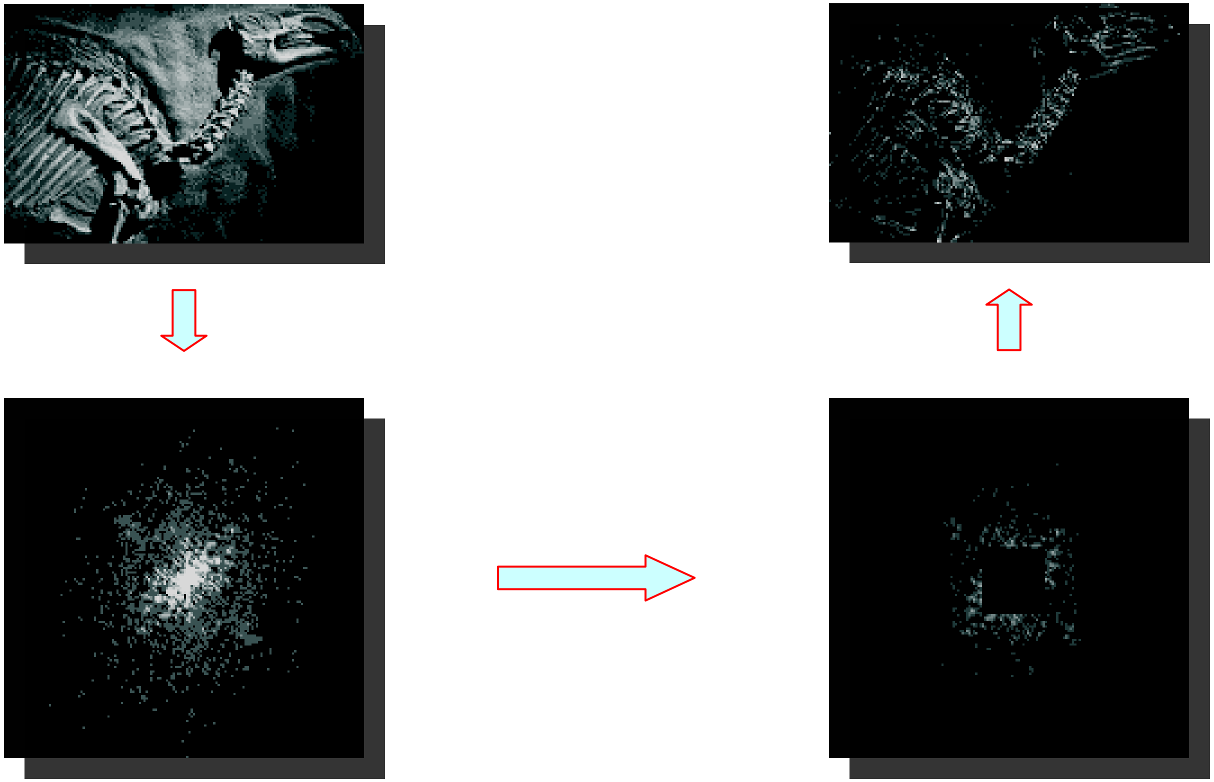
2. durch die Multiplikation mit einer Übertragungsfunktion *H*
   (hier benötigt man die Fouriertransformation)

$$g_A(i,j) = FT^{-1}\left[h(u,v) \cdot f_E(u,v)\right]$$

$$g_A(i,j) = \sum_{u=0}^{I-1} \sum_{v=0}^{J-1} h(u,v) \cdot f_E(u,v) \cdot e^{2\pi i\left(\frac{i \cdot u}{I} + \frac{j \cdot v}{J}\right)}$$

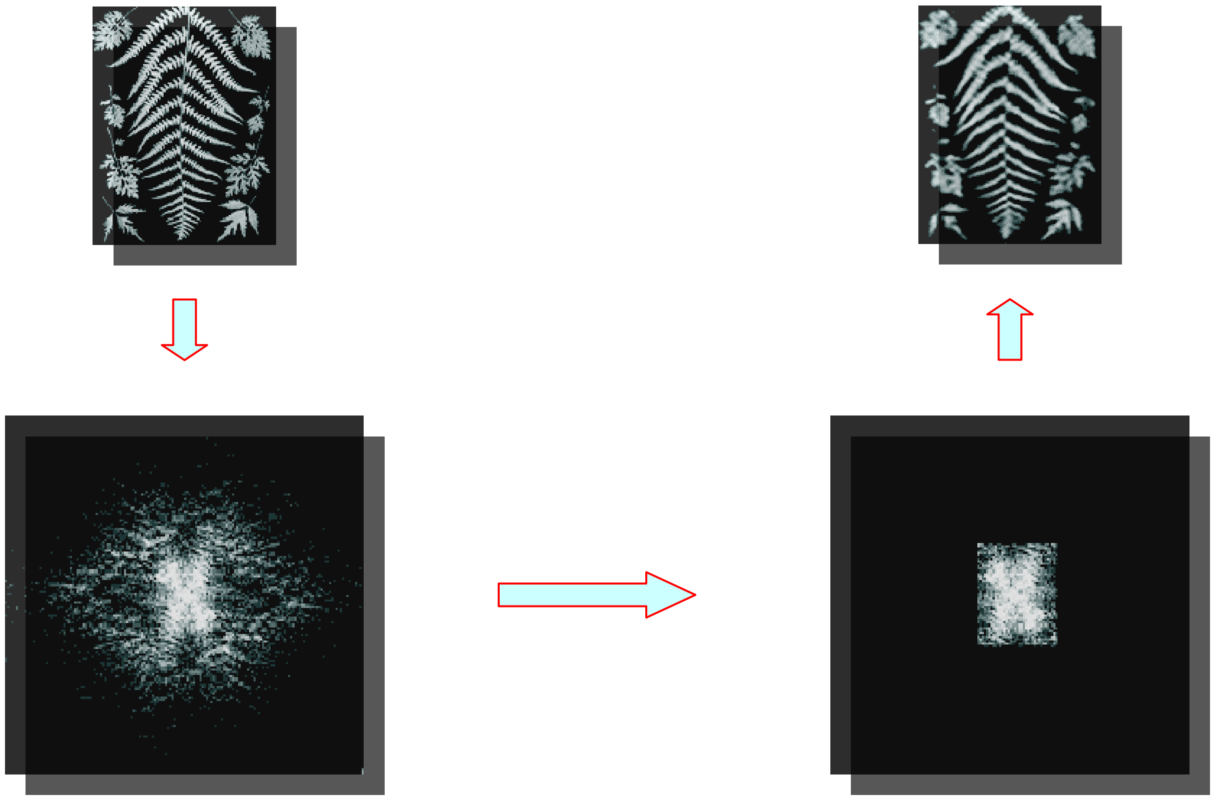
Anwendung des Faltungssatzes - Kanten

- Beim Entfernen des mittleren Bereiches innerhalb der Fouriertransformation können Kanten im Bild hervorgehoben werden



Anwendung des Faltungssatzes - Bildstörungen

- Beim Entfernen des äußeren Bereiches innerhalb der Fouriertrans-formation können Bildstörungen analog zur Mittelwertoperation im Bild behandelt werden. Es entsteht aber ein verwischtes Bild.



2.4.6 Schnelle Fouriertransformation – FFT

Schnelle Fouriertransformation

$$f(u,v) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \left(\boxed{\sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot e^{-2\pi i \frac{j \cdot v}{J}}} \right) e^{-2\pi i \frac{i \cdot u}{I}}$$

$$f(k) = \sum_{t=0}^{N-1} g(t) \cdot e^{-2\pi i \frac{k \cdot t}{N}}, k = 0, \ldots, N-1$$

$$k = v \quad t = j \quad N = J \quad g(t) = s(i,t)$$

$$\boxed{f_1(i,v) = \sum_{j=0}^{J-1} s(i,j) \cdot e^{-2\pi i \frac{j \cdot v}{J}}, v = 0, \ldots, J-1}$$

$$f(u,v) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} f_1(i,v) \cdot e^{-2\pi i \frac{i \cdot u}{I}}, u = 0, \ldots, J-1$$

Schnelle Fouriertransformation

$$f(u,v) = \frac{1}{I \cdot J} \boxed{\sum_{i=0}^{I-1} f_1(i,v) \cdot e^{-2\pi i \frac{i \cdot u}{I}}}, u = 0,\ldots, J-1$$

$$f(k) = \sum_{t=0}^{N-1} g(t) \cdot e^{-2\pi i \frac{k \cdot t}{N}}, k = 0,\ldots, N-1$$

$$k = u \quad t = i \quad N = I \quad g(t) = f_1(t,v)$$

$$\boxed{f_2(u,v) = \sum_{i=0}^{I-1} f_1(i,v) \cdot e^{-2\pi i \frac{i \cdot u}{I}}, u = 0,\ldots, J-1}$$

$$f(u,v) = \frac{1}{I \cdot J} \cdot f_2(u,v)$$

Rekursive Berechnung

$$\boxed{f(k)=\sum_{t=0}^{N-1} g(t)\cdot e^{-2\pi i\frac{k\cdot t}{N}}}$$

$$N=2^p \qquad W_N=e^{-\frac{2\pi i}{N}} \qquad k<\frac{N}{2}$$

$$W_N^2=e^{-\frac{2\pi i}{N/2}}=W_{\frac{N}{2}}$$

$$f(k)=\sum_{t=0,2,4}^{N-2} g(t)\cdot W_N^{tk}+\sum_{t=1,3}^{N-1} g(t)\cdot W_N^{tk} = \sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2t)\cdot W_N^{2tk}+\sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2t+1)\cdot W_N^{(2t+1)k}$$

$$=\boxed{\sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2t)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{tk}}+W_N^k\cdot\boxed{\sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2t+1)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{tk}} = f_1(k)+W_N^k f_2(k)$$

$$\boxed{f(k)=f_1(k)+W_N^k f_2(k)} \qquad k<\frac{N}{2}$$

Rekursive Berechnung

$$\frac{N}{2}-1<k\leq N-1$$

$$W_N^{k-\frac{N}{2}}=e^{-\frac{2\pi i}{N}\left(k-\frac{N}{2}\right)}=W_N^k\cdot e^{\frac{2\pi i}{2}}=-W_N^k$$

$$W_N^{\left(k-\frac{N}{2}\right)t}=W_N^{kt} \qquad \text{t – gerade}$$

$$W_N^{\left(k-\frac{N}{2}\right)t}=-W_N^{kt} \qquad \text{t – ungerade}$$

$$f(k)=\sum_{t=0,2,4}^{N-2}g(t)\cdot W_N^{tk}+\sum_{t=1,3}^{N-1}g(t)\cdot W_N^{tk} = \sum_{t=0,2,4}^{N-2}g(t)\cdot W_N^{t\left(k-\frac{N}{2}\right)}-\sum_{t=1,3}^{N-1}g(t)\cdot W_N^{t\left(k-\frac{N}{2}\right)}$$

$$0\leq k-\frac{N}{2}<\frac{N}{2} \longrightarrow f(k)=f_1\left(k-\frac{N}{2}\right)-W_N^{k-\frac{N}{2}}f_2\left(k-\frac{N}{2}\right)$$

$$\boxed{f(k)=f_1\left(k-\frac{N}{2}\right)+W_N^k f_2\left(k-\frac{N}{2}\right)}$$

$$\frac{N}{2}-1<k\leq N-1$$

Rekursive Berechnung

$$f(k) = f_1(k) + W_N^k f_2(k)$$

$$k < \frac{N}{2}$$

$$f(k) = f_1\left(k - \frac{N}{2}\right) + W_N^k f_2\left(k - \frac{N}{2}\right)$$

$$\frac{N}{2} - 1 < k \le N - 1$$

Die beiden Gleichungen erlauben eine rekursive effiziente Berechnung der Fouriertransformation, weil man $f_1(k)$ und $f_2(k)$ analog zerlegen kann.

N=4

$$f(k) = f_1(k) + W_4^k f_2(k)$$

$$k < \frac{N}{2} = 2, \quad k = 0,1$$

$$f(k) = f_1(k-2) + W_4^k f_2(k-2)$$

$$\frac{N}{2} - 1 < k \le N - 1$$

$$k = 2,3$$

N=4

$$f_1(k) = \sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2t)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{tk} = \sum_{t=0}^{1} g(2t)\cdot W_2^{tk}$$

$$f_1(0) = \sum_{t=0}^{1} g(2t)\cdot W_2^{t\cdot 0} = g(0)+g(2)$$

$$f_1(1) = \sum_{t=0}^{1} g(2t)\cdot W_2^{t\cdot 1} = g(0)-g(2)$$

$$f_2(k) = \sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2t+1)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{tk} = \sum_{t=0}^{1} g(2t+1)\cdot W_2^{tk}$$

$$f_2(0) = \sum_{t=0}^{1} g(2t+1)\cdot W_2^{t\cdot 0} = g(1)+g(3)$$

$$f_2(1) = \sum_{t=0}^{1} g(2t+1)\cdot W_2^{t\cdot 1} = g(1)-g(3)$$

N=4

$$f(k) = f_1(k) + W_4^k f_2(k)$$

$$f(k) = f_1(k-2) + W_4^k f_2(k-2)$$

$k = 0,1$

$k = 2,3$

$$W_4 = e^{-\frac{2\pi i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$$

$$f(0) = f_1(0) + f_2(0) = g(0) + g(2) + g(1) + g(3)$$

$$W_4^2 = -1$$

$$f(1) = f_1(1) + W_4 \cdot f_2(1) = g(0) - g(2) - i(g(1) - g(3))$$

$$W_4^3 = i$$

$$f(2) = f_1(0) + W_4^2 f_2(0) = g(0) + g(2) - g(1) - g(3)$$

$$f(3) = f_1(1) + W_4^3 \cdot f_2(1) = g(0) - g(2) + i(g(1) - g(3))$$