Transformationen von Linguistischen Variablen unter Zuhilfenahme von Strukturen der linearen Algebra

Ekkehard Hennebach, Werner Dilger
TU Chemnitz-Zwickau

Zusammenfassung

Dieser Artikel hat das Anliegen, einen neuen Aspekt zur Theorie der Fuzzy-Steuerungen vorzustellen. Es werden Transformationen von Werten zwischen verschiedenen Linguistischen Variablen mit Techniken der linearen Algebra untersucht.

1 Einleitung

Folgende Fragestellung soll im Artikel beleuchtet werden. Es sei eine Fuzzy-Steuerung gegeben, die ausgehend von (Zustands-)Werten einer linguistischen Variablen, die Werte einer linguistischen Steuervariablen festlegt.
Unter welchen Bedingungen kann diese Steuerung für modifizierte Zustandsvariable korrekt verwendet werden, indem man die Werte der neuen Zustandsvariablen geeignet in die der alten transformiert?
In den ersten beiden Abschnitten wird dazu eine Darstellung von linguistischen Variablen mit Strukturen der linearen Algebra eingeführt und es werden analytische Aussagen abgeleitet. Im dritten Abschnitt wird dieses Konzept auf linguistische Variable angewandt.

2 Darstellung von Punkten der reellen Achse mit Intervallbasen

Die wesentliche Struktur der linearen Algebra ist der lineare Raum. Ein linearer Raum ist gekennzeichnet durch eine Menge E und einen Zahlenkörper K. Zwischen den Elementen von E ist die Addition erklärt und zwischen E und K das Produkt. Beide Operationen sind abgeschlossen bezüglich E. Ein linearer Raum ist n-dimensional, wenn genau n *linear unabhängige* Elemente aus E existieren. Aus der Existenz von n linear unabhängigen Basiselementen läßt sich folgern, daß sich jedes Element eindeutig als *Linearkombination* der Basiselemente darstellen läßt. In diesem Sinne werden Punkte aus $\Re$ durch Linearkombination von Basispunkten dargestellt.

Definition 2.1 *Eine geordnete Menge von Punkten $X = \{x_0, ..., x_n\}; n > 0; x_i < x_{i+1}; x_i \in \Re$ heißt* **Intervallbasis** *.*
Das abgeschlossene Intervall zwischen dem nullten und n-ten Punkt wird mit $\delta X = [x_0, x_n]$ bezeichnet und heißt **Domäne** *von X, die Menge der Punkte $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$* **Inneres** *von X $(Int(X))$. n nennen wir die* **Dimension** *der Intervallbasis.*

Definition 2.2 *Ein Vektor $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$ heißt* **konvexer Parametervektor** *wenn $\alpha_i \in [0, 1]$ für alle $i = 0, ..., n$ und $\sum_0^n \alpha_i = 1$.*
Die Menge aller konvexen Parametervektoren nennen wir **G**.

Jede Darstellung

$$x = (\alpha, X) = \sum_0^n \alpha_i x_i, \alpha \in G \tag{1}$$

heißt **konvexe Parameterdarstellung** von x in X.
Die Definition der Parameterdarstellung gibt also für einen Punkt $x \in \delta X$ Gewichtswerte an, mit denen x gerade der Massenschwerpunkt der Basispunkte ist.
Offenbar beschreibt (1) wegen der Bedingung $\sum \alpha_i = 1$ gerade die konvexe Hülle der Elemente der Intervallbasis und damit genau die Domäne von X.
Wie man leicht sieht, gibt es für eine zweielementige Basis für jedes x aus ihrer Domäne genaue eine Darstellung $\alpha \in G$. Für dreielementige Basen existieren, wie die folgenden Beispiele zeigen, jedoch schon unendlich viele Darstellungen von x, falls x nicht gerade auf dem Domänenrand liegt.

Beispiel 2.1 *Sei $X = (1, 2, 3); x = 1.5$. x liegt offensichtlich in der Domäne von X.*
Man kann z.B. die beiden folgenden Parameterdarstellungen von x angeben:
$x = ((0.5, 0.5, 0), (1, 2, 3)) = ((0.75, 0, 0.25), (1, 2, 3))$
Die beiden Varianten beruhen nur darauf, daß x mit

jeweils zwei *unterschiedlichen Punkten von X dargestellt wurde. Man hätte aber auch eine beliebige Darstellung mit allen drei Punkten der Basis wählen können.*

Beispiel 2.2 *Wir beziehen uns auf die Konstellation vom vorhergehenden Beispiel und ermitteln die gesamte Menge von Parameterdarstellungen von $x = 1.5$ in $X = (1, 2, 3)$.*
Die Lösungsmenge ergibt sich offenbar aus dem System von Gleichungen mit Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccc} 1*\alpha_0 & + & 2*\alpha_1 & + & 3*\alpha_2 & = & 1.5 \\ 1*\alpha_0 & + & 1*\alpha_1 & + & 1*\alpha_2 & = & 1 \end{array} \tag{2}$$

$$\alpha_i >= 0 \tag{3}$$

Die Lösungsmenge $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ist eindimensional und läßt sich beschreiben durch

$$\alpha_1 = -2\alpha_0 + 1.5 \tag{4}$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 - 0.5 \tag{5}$$

mit $\alpha_0 \in [0.5, 0.75], \alpha_1 \in [0, 0.5], \alpha_2 \in [0, 0.25]$. Interpretieren läßt sich diese Menge als Skalierung zwischen den Grenzen
$\alpha = (0.5, 0.5, 0)$ und $\alpha = (0.75, 0, 0.25)$.

Wir setzen uns jetzt das Ziel, den Basiselementen durch die passende Reduktion der Menge von mögliche Parameterdarstellungen aus G für einen Punkt $x \in \delta X$ Eigenschaften zu verleihen, die denen von linear unabhängigen Basiselementen in einem linearen Raum entsprechen. Das bedeutet m.a.W., daß es nicht möglich sein darf, einen Punkt $x \in \delta X$ durch mehrere Basiselementkombinationen darzustellen. Man kann auch fordern, daß jedem Basiselement bzw. Kombinationen von Basiselementen ein Bereich aus δX eindeutig zugeordnet ist.

Definition 2.3 *Sei $X = (x_0, ..., x_n)$ eine Intervallbasis. $\bar{G} \subset G$ macht X* **linear unabhängig**, *wenn für jede zweielementige Teilbasis $\{x_i, x_{i+1}\} \subset X$ gilt:*
Die Gleichung

$$(\beta, X) = \alpha_i x_i + \alpha_{i+1} x_{i+1}, \beta \in \bar{G}, \alpha_i + \alpha_{i+1} = 1 \tag{6}$$

gilt nur, wenn $\beta_i = \alpha_i, \beta_{i+1} = \alpha_{i+1}$ sowie
$\beta_k \equiv 0, k \neq i, i+1$.

Folgerung 2.1 *Es gibt genau eine Teilmenge von G, die eine Basis X linear unabhängig macht, da es mit zwei Parametern nur eine Möglichkeit gibt $x \in [x_i, x_{i+1}]$ als Schwerpunkt zwischen x_i und x_{i+1} darzustellen:*

$$\begin{array}{rcl} \alpha_i & = & (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i) \\ \alpha_{i+1} & = & (x - x_i)/(x_{i+1} - x_i) \end{array} \tag{7}$$

Es ergibt sich somit ein linearer *Zusammenhang zwischen x und α und deshalb eine* eineindeutige *Zuordnung zwischen x und α.*
Wir nennen die Teilmenge von G, die eine Basis linear unabhängig macht, $\mathbf{G^2}$.

3 Koordinatentransformationen

Seien $X = (x_0, ..., x_n)$,$Y = (y_0, ..., y_m)$ zwei Intervallbasen mit $\delta X = \delta Y$.
Nach Definition 2.3 und Folgerung 2.1 existiert für jedes $x_i \in X$ genau ein Parametervektor
$c^i = (c_0^i, ..., c_m^i) \in G^2$,
mit dem man x_i in Y darstellen kann.

$$x_i = (c^i, Y); i = 0, ..., m \tag{8}$$

Sei $x \in \delta X$ mit $x = (\alpha, X), \alpha \in G^2$. Mit der obigen Darstellung der Basiselemente von X durch die Elemente von Y folgt:

$$x = \sum_k^n \alpha_k (\sum_j^m c_j^k y_j) = \sum_j^m (\sum_k^n \alpha_k c_j^k) y_j = \sum_j^m \beta_j y_j \tag{9}$$

wobei

$$\beta_j = C\alpha = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

Die Matrix $C : G^2 \to G$ heißt **Transformationsmatrix** von einer Parameterdarstellung in X nach einer solchen in Y. Im weiteren benutzen wir für eine Transformationsmatrix C, die die Darstellung eines Punktes in X nach einer in Y überführt die Bezeichnung $C : X \to Y$.
Selbstverständlich läßt sich auch eine Matrix D bestimmen, die von Y nach X transformiert. Im speziellen Fall, daß $N = M$ folgt $DC = I$ und damit $D = C^{-1}$.

Definition 3.1 *Eine Transformationsmatix C heißt* **regulär**, *wenn C Parametervektoren von G^2 nach G^2 transformiert, also $C : G^2 \to G^2$.*

Wie folgendes Beispiel zeigt, sind Transformationsmatrizen im allgemeinen nicht regulär:

Beispiel 3.1 *Sei $X = (1, 2, 3)$ und $Y = (1, 1.5, 3)$. Offenbar ist $\delta X = \delta Y$. Die Transformationsmatrix von X nach Y ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.\bar{6} & 0 \\ 0 & 0.\bar{3} & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Sei jetzt $x = (\alpha, X)$ mit $\alpha = (0.5, 0.5, 0) \in G^2$.
Dann ergibt $C(0.5, 0.5, 0)^T = (0.5, 0.\bar{3}, 0.1\bar{6})$
also $x = ((0.5, 0.\bar{3}, 0.1\bar{6}), Y)$.
Der Punkt x wird demnach im Sinne des Massenschwerpunktes in Y korrekt dargestellt, der neue Parametervektor gehört aber nicht mehr zu G^2.

Es soll jetzt untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine Transformationsmatrix regulär ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, spielt die Position der Basiselemente der beiden Basen zueinander für die Regularität die entscheidende Rolle.

Beispiel 3.2 *Wir betrachten folgende Fälle:*
Fall 1:
Sei $X = (1, 3, 4)$ und $Y = (1, 2, 4)$. Die Transformationsmatrix von Y nach X lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Fall 2:
Sei $\bar{X} = (1, 2, 4)$ und $\bar{Y} = (1, 2, 3, 4)$. In diesem Fall lautet die Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Die Matrix im Fall 2 ist offenbar regulär, die im Fall 1 nicht.

Diese Beobachtung gibt Anlaß für folgende Definition.

Definition 3.2 *Seien X und X_1 zwei Intervallbasen mit $\delta X_1 = \delta X$. X_1 heißt* **Erweiterung** *von X, wenn $X \cap X_1 = X$.*

Nun kann gezeigt werden, daß die Transformationsmatrix nur in dem Fall regulär ist, in dem X eine Erweiterung von Y ist, bzw. umgekehrt.

Satz 3.1 *Seien X_1 und X_2 zwei Intervallbasen mit $\delta X_1 = \delta X_2$. Dann gilt:*
$C : X_2 \to X_1$ ist regulär $\iff$ $X_2 \cap X_1 = X_1$

Beweis:
1.) $\leftarrow$
Man überzeugt sich leicht von der folgenden Aussage: Wenn X_2 eine Erweiterung von X_1 ist, gibt es für ein beliebiges benachbartes Paar von Spalten aus der Transformationsmatrix genau zwei Zeilen, die Nichtnullelemente enthalten. Damit hat für einen Parametervektor mit höchstens zwei benachbarten Nichtnullkomponenten die Transformierte ebenfalls diese Eigenschaft.
2.)$\rightarrow$ (indirekt)

Sei $X_2 \cap X_1 \neq X_1$. Dann existiert mindestens ein $x_i^1 \in X_1$, das nicht zu X_2 gehört. Sei dies o.B.d.A. x_1^1. Wir gehen nun davon aus, daß $x_2^1 \in X_1$ wieder zu X_2 gehört, andernfalls können wir die folgende Betrachtung ausgehend von x_3^1 statt x_2^1 machen oder so fort, denn spätestens x_n^1 gehört laut Voraussetzung zu beiden Basen.
Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle:
1 Es gibt kein Element von X_2, das in (x_0^1, x_2^1) liegt. Dann sähen die ersten beiden Spalten von C folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{14}$$

2 Es gibt genau ein Element x_1^2, das in (x_0^1, x_2^1) liegt. Dann sähen die ersten drei Spalten von C entweder so (für $x_1^2 \in (x_0^1, x_1^1)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \ldots \\ 0 & \beta & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{15}$$

oder so (für $x_1^2 \in (x_1^1, x_2^1)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \alpha & 0 & \ldots \\ 0 & \beta & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{16}$$

aus.
In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zur Regularität von C, der offenbar auch im verbleibenden Fall, daß es mehrere Elemente von X_2 in (x_0^1, x_2^1) gibt, auftreten würde.

$\square$

4 Betrachtung der Werte von Linguistischen Variablen als Parameterdarstellung in Intervallbasen und Folgerungen bezüglich ihrer Transformation

Fuzzy-Steuerungen definiert man durch *approximatives Schließen* über *linguistischen Variablen*.

Definition 4.1 *Eine* **linguistische Variable** *sei definiert durch ein Tupel*
$< X, \pounds X, \chi, M_x >$, *mit*

X - Name der Variablen

$\pounds X = (item_0, ..., item_n)$ - n linguistische Werte

χ - Intervall, über dem die Variable definiert ist

$M_x = (\mu_0, ..., \mu_n)$ - n Fuzzy-Mengen, die die Semantik von $\pounds X$ beschreiben

Wir definieren jetzt ein spezielles $\bar{M}_x$:
Seien $x_0, ..., x_n$ n Punkte in χ, wobei x_0 und x_n die Intervallgrenzen von χ sein sollen. Dann sei

$$\mu_i(x) = \begin{pmatrix} (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & sonst \end{pmatrix} \tag{17}$$

$i = 0, ..., n$
Mit $x_{M_X} = (x_0, ..., x_n)$ werden die Mittelpunkte der Fuzzy-Mengen aus $\bar{M}_x$ gekennzeichnet.
Offenbar ist $\bar{M}_x(x)$ für $x \in \chi$ gerade eine linear unabhängige Parameterdarstellung in der Basis x_{M_X}.

Sei jetzt Y eine zweite linguistische Variable mit
$Y =< Y, \pounds Y, \chi, \bar{M}_y >$.
Dann läßt sich eine Transformationsmatrix
$C : x_{M_Y} \rightarrow x_{M_X}$ angeben, die für $x \in \chi$ die Werte der Variablen ineinander überführt. Nach Satz 3.1 ist C regulär, falls $x_{M_Y} \cap x_{M_X} = x_{M_X}$.

Beispiel 4.1 *Sei eine Fuzzy-Steuerung gegeben mit einer lingustischen Zustandsvariablen*

$$< \textit{Temperatur-grob, (kalt, warm)}, \chi, \bar{M}_{Tg} > \tag{18}$$

sowie einer Steuervariablen

$$< \textit{Wärmemenge, (heizen,kühlen)}, \psi, \bar{M}_W > \tag{19}$$

Sei Temperatur-fein eine linguistische Variable mit

$$< \textit{T-fein, (sehr kalt,kalt,lau,warm,heiß)}, \chi, \bar{M}_{Tf} > \tag{20}$$

Kann man nun die Steuerung auch für Werte aus Temperatur-fein verwenden?
Man kann mit den Resultaten aus vorhergehenden Abschnitten die folgende Aussage treffen:
Ein Wert aus Temperatur-fein, der einem Punkt $x \in \chi$ entspricht, kann nur auf den eindeutigen Wert von Temperatur-grob, der ebenfalls x entspricht, projeziert werden, wenn $x_{M_{Tg}} \subseteq x_{M_{Tf}}$. In diesem Fall, können wir nämlich eine reguläre Transformationsmatrix zur Überführung von Werten von Temperatur-fein auf Werte von Temperatur-grob angeben. Damit erhalten wir für $x_{M_{Tg}} \subseteq x_{M_{Tf}}$ nach Transformation und Abbildung auch den gleichen Steuerwert der Variablen Wärmemenge.

5 Folgerungen

Die Beschreibung von Zugehörigkeitswerten von Fuzzy-Mengen einer linguistischen Variablen als Massenschwerpunkt einer Basis ermöglichte die Anwendung von Techniken der linearen Algebra, wie zum Beispiel der Koordinatentransformation. Für den Fall, daß die Fuzzy-Mengen einer linguistischen Variablen über

$$\mu_i(x) = \begin{pmatrix} (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & sonst \end{pmatrix} \tag{21}$$

$i = 0, ..., n$
definiert sind, ist die Darstellung als Massenschwerpunkt sogar eineindeutig. Unter dieser Voraussetzungen erweisen sich Transformationen nur im projektiven Sinn als korrekt bzw. konsistent, was der Untersuchungsgegenstand dieses Artikels war. Die Untersuchung von Fällen, die die Eineindeutigkeit nicht voraussetzen, könnte aber durchaus auch interessant sein. In der Ausdrucksweise von Abschnitt 1 beträfe das spezielle nicht linear unabhängigen Teilmengen von G.

Literatur

[1] Frieder Kuhnert. *Vorlesungen über lineare Algebra.* Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1976.

[2] Dimiter Driankov, Hans Hellendoorn, Michael Reinfrank. *An Introduction to Fuzzy Control.* Springer Verlag 1993