
Seminar zur Vorlesung Quantenmechanik
Übungsblatt 3
Das Versagen der klassischen Physik

Wintersemester 15/16

1 Der schwarze Strahler

Der schwarze Strahler ist ein idealisiertes Modell, welches nach exakter Herleitung innerhalb der klassischen Physik mit dem Rayleigh-Jeans-Gesetz beschrieben werden könnte:

$$dE = \rho(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda \quad (1)$$

Für sehr kleine Wellenlängen wird die Energiedichte dE unendlich groß, was als Ultraviolett Katastrophe bezeichnet wird und dem Experiment widerspricht. Eine alternative Herleitung, die nicht von den Gesetzen der klassischen Physik, sondern von quantisierten Schwingungsenergien ausgeht, wurde 1900 von Max Planck erbracht. Die Energiedichte lautet nach dem Planckschen Strahlungsgesetz:

$$dE = \rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (2)$$

Die Beobachtungen rund um den Schwarzen Strahler sowie Plancks Herleitung gelten als Beginn der Quantenphysik.

Weisen Sie nach, dass für sehr große Wellenlängen (d.h. $\nu \rightarrow 0$) das Rayleigh-Jeans-Gesetz (Gl. (1)) eine gute Näherung für das Plancksche Strahlungsgesetz (Gl. (2)) ist, indem sie folgende Aufgaben erledigen:

- (i) Wie lautet die allgemeine Vorschrift für eine Taylor-Entwicklung? Entwickeln Sie $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ in einer Taylorreihe an der Stelle $\nu = 0$ bis zur zweiten Ordnung. Setzen Sie das Ergebnis in Gl. (2) ein, fassen Sie zusammen, klammern Sie aus und vereinfachen Sie die Brüche.
- (ii) Geben Sie den $\lim_{\nu \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \frac{h\nu}{2kT}} \right)$ an und setzen Sie das Ergebnis in Ihr Zwischenergebnis aus (i) ein.
- (iii) Zeigen Sie die Gültigkeit der Transformationsvorschrift in Gl. (3) unter Nutzung von Gl. (4). Warum ist es sinnvoll, die Grenzen zu tauschen (es gelte $\nu_2 > \nu_1$)? Verwenden Sie die Transformationsvorschrift, um aus dem Ergebnis von (ii) das Rayleigh-Jeans-Gesetz herzuleiten.

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \quad (3)$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (4)$$

2 Photoelektrischer Effekt

Neben anderen experimentellen Hinweisen auf Quantelung in der Natur wurde der quantisierte Charakter (Teilchencharakter) von elektromagnetischer Strahlung durch den Photoelektrischen Effekt nahegelegt (Hallwachs, 1888) und verstanden (Einstein, 1905).

$$h\nu = W_A + E_{kin} \quad (5)$$

- (i) Erläutern Sie kurz, warum der Photoelektrische Effekt ein Hinweis auf den Teilchencharakter der Strahlung ist.
- (ii) Wird Zink mit Licht der Frequenz $\nu = 2 \cdot 10^{15}$ Hz bestrahlt, beträgt die kinetische Energie der emittierten Elektronen $5.241 \cdot 10^{-19}$ J. Bestimmen Sie die Austrittsarbeit W_A (in J und eV) für Zink.
- (iii) Wie groß ist die Grenzfrequenz des Zinks sowie die zugehörige Wellenlänge? Welche kinetische Energie haben die emittierten Elektronen des Zinks bei einer eingestrahnten Wellenlänge von $\lambda = 300$ nm?

3 De-Broglie-Beziehung

Bestimmen Sie die de-Broglie-Wellenlänge für:

- (i) einen Baseball mit der Masse 0.14 kg, der sich mit 40 m/s bewegt,
- (ii) ein Proton mit der kinetischen Energie 100 eV,
- (iii) ein Elektron mit 20 % der Lichtgeschwindigkeit,
- (iv) ein Ne-Atom bei $T = 20^\circ\text{C}$ (Verwenden Sie die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$)

Benötigte Konstanten für Aufgabe 2 und 3:

$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$	$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
$R = 8.314 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$	$m_{p^+} = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$m_{e^-} = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
$m_{Ne} = 3.351 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$	$M_{Ne} = 20.180 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$	

*FAZIT: Die hier behandelten und weitere physikalische Beobachtungen (z.B. Doppelspalterperiment, diskrete Atomspektren,...) deuten auf eine Quantisierung in der Natur sowie einen Welle-Teilchen-Dualismus hin, was mithilfe der klassischen Physik nicht erklärbar ist. So wurden Anfang des 20. Jahrhunderts erste Quantentheorien entwickelt (v.a. durch M. Planck, A. Einstein, N. Bohr, L. de Broglie,...), die dann zur Begründung der Quantenmechanik (ab 1925, v.a. durch W. Heisenberg, M. Born, E. Schrödinger, W. Pauli, P. Dirac,...) führten. Die Grundlagen der Quantenmechanik und ihre Postulate wurden 1927 in der Kopenhagener Interpretation formuliert. So führt das **erste Postulat** der Quantenmechanik zum Wellencharakter der Materie hin:*

Der Zustand eines Systems wird vollständig durch eine Funktion $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t)$ beschrieben.

Ψ wird als Wellenfunktion bezeichnet und hängt von den Raumkoordinaten ($\mathbf{r}_i$) sowie der Zeit (t) ab.