

Seminar 'Mathematik für Chemiker'

6. Übung: Vektoralgebra

Aufgabe 1: Dirac-Schreibweise, Skalarprodukt und Betrag von Vektoren

- Ein Spaltenvektor $\vec{a}$ entspricht in Dirac-Notation einem Ket $|a\rangle$. Adjungiert man das Ket, so erhält man einen Zeilenvektor mit komplex konjugierten Einträgen, der als Bra $\langle a|$ bezeichnet wird.
- Das Kronecker-Delta δ_{ij} ist eine Funktion, die folgendermaßen definiert ist:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j \\ 1 & \text{wenn } i = j \end{cases} \quad (1)$$

Gegeben seien die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \\ 1+i \end{pmatrix} \quad (2)$$

- Bilden Sie das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Wie sieht das Skalarprodukt zweier reeller Vektoren in Bra-Ket-Schreibweise aus? Was passiert, wenn man $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vertauscht?
- Bilden Sie den Betrag von $\vec{a}$. Wie lautet der Betrag eines reellen Vektors in Bra-Ket-Schreibweise?
- Die in a) und b) gefundenen Definitionen für Skalarprodukt und Betrag (in Bra-Ket-Schreibweise) können auch auf komplexe Vektoren verallgemeinert werden. Berechnen Sie das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Was passiert, wenn man $\vec{a}$ und $\vec{c}$ vertauscht? Berechnen Sie den Betrag von $\vec{c}$.
- Weisen Sie (für zwei beliebige Vektoren) nach: Wenn $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$, dann bilden $\vec{a}_i$ und $\vec{a}_j$ einen Satz orthonormierter Vektoren.

Aufgabe 2: Lineare Unabhängigkeit und Basis eines Vektorraums

Die Basis eines n -dimensionalen Vektorraums besteht aus einem beliebigen Satz von n linear unabhängigen Vektoren. Mit dieser Basis lässt sich jeder beliebige Vektor dieses Vektorraums durch eine Linearkombinationen darstellen.

Gegeben seien die drei Vektoren:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- Bilden Sie das Vektorprodukt $\vec{s} = \vec{q} \times \vec{r}$.
- Zeigen Sie: $\vec{s}$ ist orthogonal zu $\vec{q}$ sowie zu $\vec{r}$.

c) Untersuchen Sie, ob der Satz von Vektoren linear unabhängig ist und eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellt:

I) $\vec{p}, \vec{q}$

II) $\vec{q}, \vec{r}$

III) $\vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$

d) Gegeben sei die Einheitsbasis (kanonische Basis) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ sowie ein Vektor $\vec{v}$ (beide im $\mathbb{R}^n$).

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i | v \rangle \quad (5)$$