

Seminar 'Mathematik für Chemiker'

5. Übung: Komplexe Zahlen & Matrizen I

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

- a) Tragen Sie $z = 3 + i \cdot 4$ sowie z^* in die Gaußsche Zahlenebene ein. Berechnen Sie $z + z^*$, $z - z^*$, $\frac{z}{z^*}$, $|z|$ und $\sqrt{z^* \cdot z}$.
- b) Begründen Sie am Beispiel der Zahl z den Zusammenhang (Gl. 1) zwischen der Darstellung einer komplexen Zahlen z in kartesischen Koordinaten $(a; b)$ und in Polarkoordinaten $(r; \varphi)$. Ermitteln Sie z in Polarkoordinaten.

$$z = a + b \cdot i = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (1)$$

- c) Ein wichtiger Zusammenhang im Bereich der komplexen Zahlen ist die Euler-Formel (Gl. 2). Geben Sie z in Eulerscher Darstellung an und berechnen Sie z^3 in allen drei Darstellungsformen.

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

Aufgabe 2: Rechnen mit Matrizen

Beim Transponieren einer Matrix $\mathbf{A}$ werden die Spalten und Zeilen miteinander vertauscht, d.h. der j -te Spaltenvektor dieser Matrix wird zum j -ten Zeilenvektor und umgekehrt. Die adjungierte Matrix $\mathbf{A}^\dagger$ geht aus der transponierten Matrix $\mathbf{A}^T$ durch komplexes Konjugieren aller Matrix-Elemente hervor.

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4i & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- a) Welche dieser Matrizen ist: reell, quadratisch, symmetrisch, diagonal, eine Einheitsmatrix?
- b) Bilden Sie: $\mathbf{B}^T$, $\mathbf{C}^\dagger$, $\mathbf{D}^T$, $\mathbf{E}^\dagger$
- c) Berechnen Sie, wenn möglich: I) $\mathbf{B} + \mathbf{E}$ II) $\mathbf{C} + \mathbf{D}$ III) $\mathbf{C} + \mathbf{D}^T$
- d) Berechnen Sie, wenn möglich: I) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}$ II) $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^T$ III) $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}^T$ IV) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- e) Berechnen Sie: $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$, ..., $\mathbf{B}^n$