

# Vorlesungsmitschrift Quantenmechanik

## Vorlesender: Prof. W. Goedel

Thomas Lenk

11. Januar 2010

### klassische Physik:

- Kraft = Masse \* Beschleunigung
- Kraft = Impulsänderung / Zeit
- Impuls =  $mv$
- kinetische Energie =  $\frac{1}{2}mv^2$
- anziehende und repulsive Kräfte:
  - Gravitationskraft
  - Elektrostatik
  - magnetische Kräfte
- Felder und Potentiale:
  - Gravitation
  - elektrostatisch
  - magnetisch
- Schwingungen
- Wellen

### klassische Physik

- Materie mit konstanter Masse  
Geschwindigkeit  
Impuls  $mv$   
Kraft =  $\frac{\text{Impulsänderung}}{\text{Zeit}} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$   
Ladung  
Felder: Gravitation, Elektrisch, Magnetisch
- Wellen: Oberflächenwellen, Schallwellen, Lichtwellen  
Brechung  
Beugung  
von beschleunigter, abgebremster Strahlung geht eine elektromagnetische Welle aus

# 1 Die Probleme der klassischen Physik - und ihre Lösungen

## Strahlung eines schwarzen Körpers

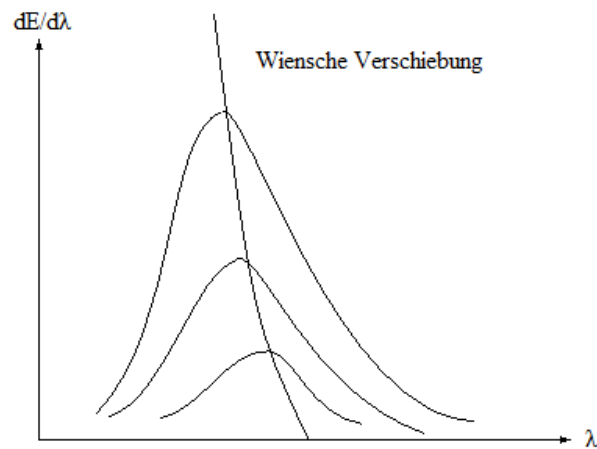


Abbildung 1: Wiensche Verschiebung

Rayleigh:

Annahme: Im schwarzen Körper gibt es Elemente, die schwingen können und aufgrund ihrer Schwingungen elektromagnetische Strahlung aussenden

Equipartition: Energie pro Freiheitsgrad pro Molekül:  $\frac{1}{2}k_B T \rightarrow \sim T$

$\rightarrow$  Abstrahlungsamplitude  $\sim v^2 \sim \lambda^{-2}$   $v\lambda = c$

$\rightarrow$  Abgestrahlte Leistung  $\sim \lambda^{-4}$  Rayleigh-Jeans-Gesetz

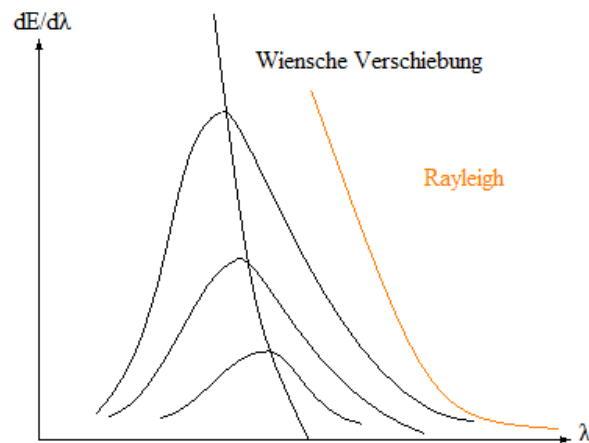


Abbildung 2: Wiener Verschiebung mit Rayleigh-Gesetz

Planck modifiziert das Rayleigh-Jeans-Gesetz um die Annahme, dass nicht mehr alle Schwingungsamplituden erlaubt sind, sondern nur ganzzahlige Vielfache einer Gradamplitude.

$\Rightarrow$  Plancksches Strahlungsgesetz:

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left( e^{\left( \frac{hc}{\lambda k_B T} \right)} - 1 \right)}$$

Das Strahlungsgesetz benötigt eine Konstante  $h$ , das „Wirkungsquantum“  $[h] = J \cdot s$

Für sehr große  $\lambda$ :

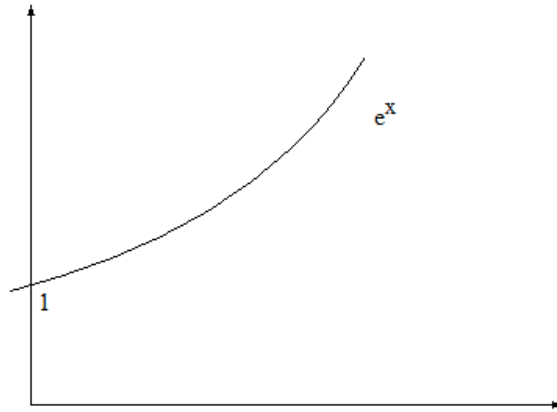


Abbildung 3: Planksches Gesetz

$e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} \sim 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T}$   
 → für hohe Werte von  $\lambda$  konvergieren Plank und Rayleigh-Jeans

## Wärmekapazitäten von Festkörpern

Dulong-Petit-Gesetz:

Wärmekapazität eines Festkörpers:

$$c_{v,m} = 3R \Rightarrow U = 3Nk_B T$$

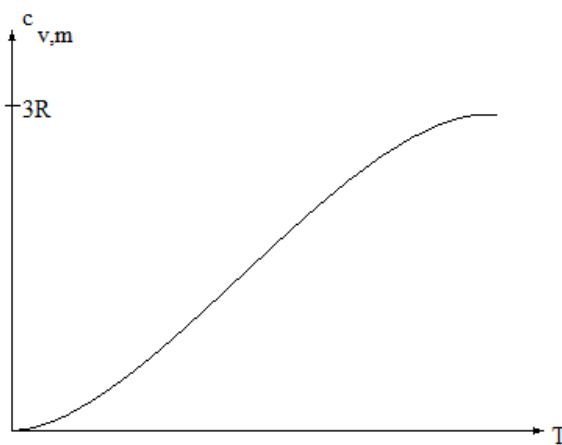


Abbildung 4:  $c_{v,m}$ -T-Diagramm

Einstein: In einem Festkörper seien wiederum nur Vielfaches von Schwingungsamplituden erlaubt (nur eine Frequenz berücksichtigt)

$$U = \frac{3N h \nu}{e^{\left(\frac{h \nu}{k_B T} - 1\right)}}$$

Für große Werte von T:

→  $e^{\frac{h \nu}{k_B T}} \sim 1 + \frac{h \nu}{k_B T} \Rightarrow$  Dulong-Petit ist erfüllt.

# Der Photoelektrische Effekt

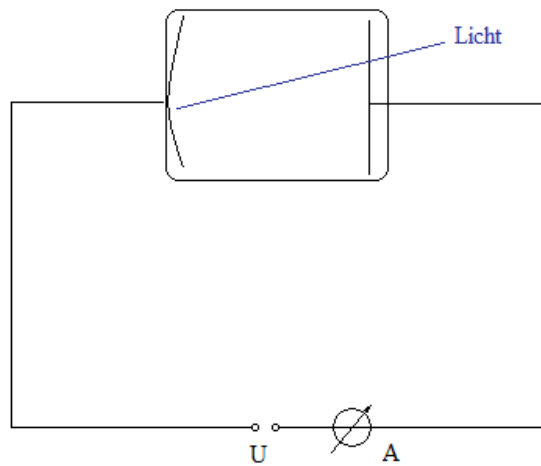


Abbildung 5: Schaltplan des Versuches

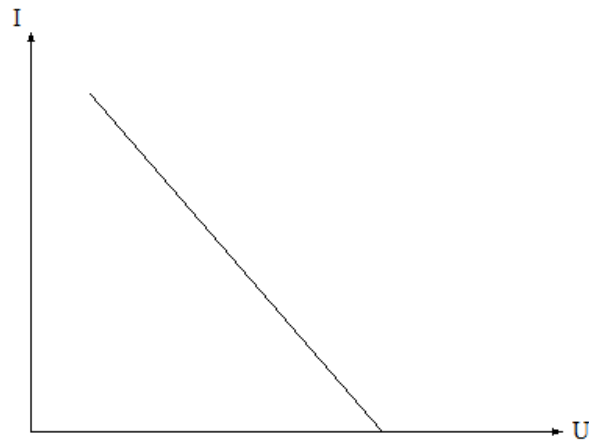


Abbildung 6: Erhöht man die Gegenspannung, so fließt irgendwann kein Strom mehr

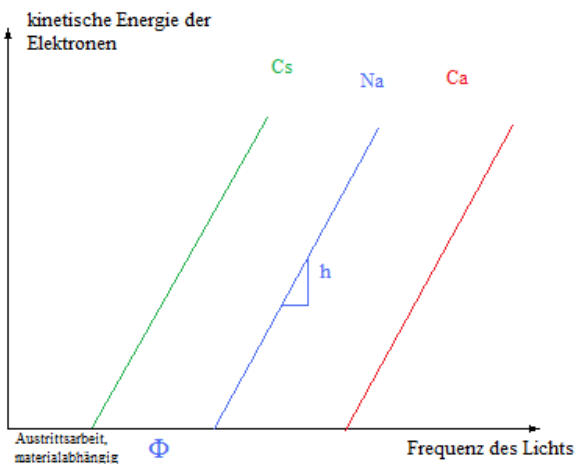


Abbildung 7: Die Frequenz des Lichtes, die benötigt wird um Elektronen rauszulösen, ist Materialabhängig

Licht ist eine Welle, aber die Energie wird auf die Metalloberfläche „in Paketen“ übertragen.  $h\nu$

# Wellen-Teilchen-Dualismus

Streu- und Beugungsexperimente zeigen, dass sich Elektronen wie Wellen verhalten.

## 1925 - Entdeckung der Elektronendiffraktometrie

Beugung von Elektronen an einem Kristall

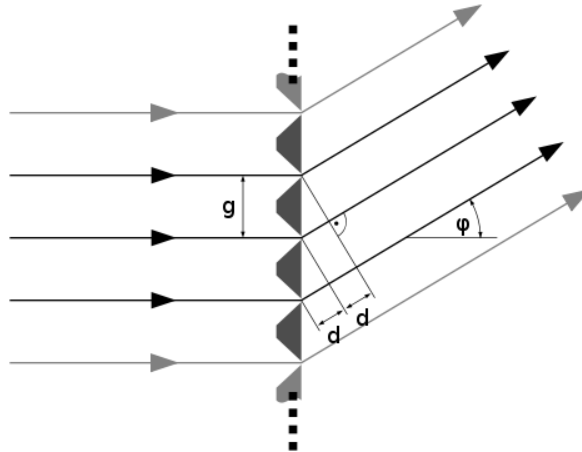


Abbildung 8: Beugung an einem Spalt [2]

Beugungsbedingung:  $d \sin \vartheta = n\lambda$

Beugung an einem Gitter:

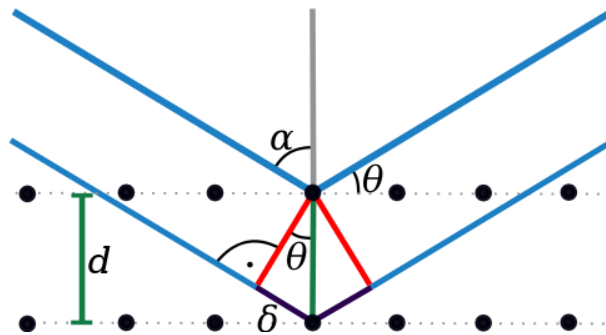


Abbildung 9: Beugung an einem Gitter [1]

Konstruktive Interferenz, wenn  $n\lambda = 2d \sin \vartheta$ , das ist die Bragg'sche Bedingung.

Bestrahlt man einen Kristall mit Elektronen, so zeigen diese ganz analog zur Beugung elektromagnetischer Strahlung Beugungsbilder.

Aufgrund der Bragg'schen Bedingung kann man nun den Elektronen Wellenlängen zuordnen.

⇒ de-Broglie-Beziehung:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

## Beugung von Elektronen am Doppelspalt

### Beugung von Licht am Doppelspalt (Young'sches Beugungsexperiment)

- wurde ca. 1800 verwendet, um zu zeigen, dass Licht Wellennatur hat
- wurde 1961 verwendet um ebenfalls zu zeigen, dass Elektronen Wellennatur haben (Jönsson, Uni Tübingen)

- 1974 wurde gezeigt, dass diese Experiment auch dann zu Beugungsbildern führt, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 Elektronen im Strahlengang sind, verschwindend gering ist. *Die Messung eines Elektrons erfolgt mit einem sogenannte Elektronenmultiplier.*

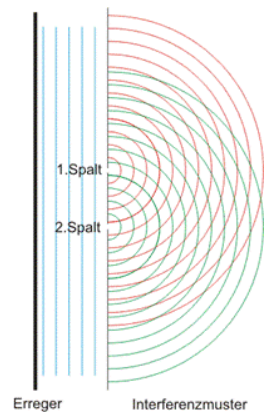


Abbildung 10: Beugung am Doppelspalt [3]

### Rutherford'sches Streuexperiment

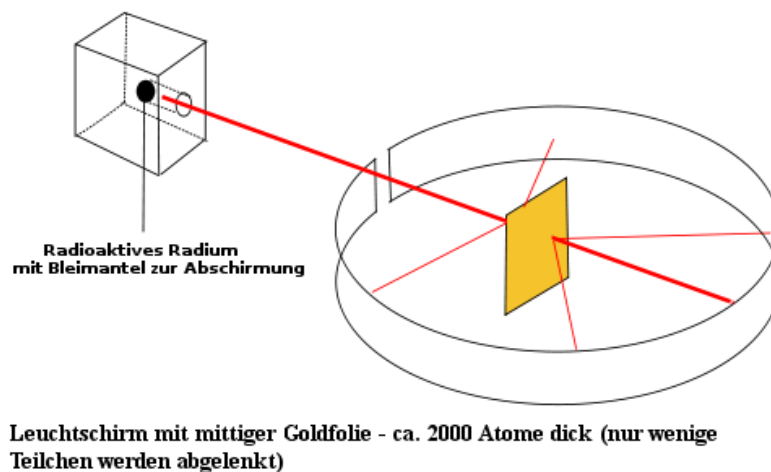


Abbildung 11: Versuchsaufbau [4], Text im Bild modifiziert

Aus der Intensitätsverteilung und der Annahme einer hyperbelförmigen Flugbahn konnte Rutherford den Radius der Störzentren berechnen → Atome bestehen aus einem sehr kleinen Kern mit positiver Ladung. Um den Kern ist nahezu nichts, wo sich die Elektronen mit sehr geringer Masse aufhalten. Für das Elektron sind Zentrifugalkraft und elektrostatische Anziehungskraft gleich.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$mv^2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

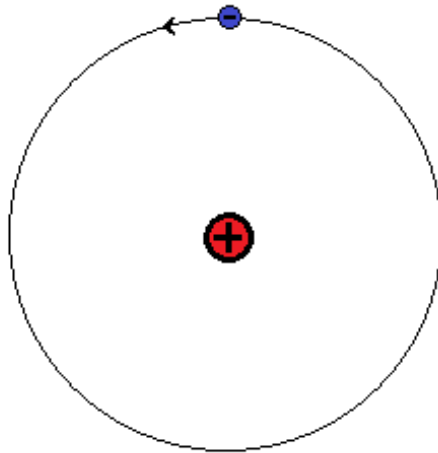


Abbildung 12: Rutherfords Vorstellung vom Atombau

Das Rutherford'sche Atommodell erklärt nicht:

- Warum sich auf Kreisbahnen um den Kern bewegende Elektronen keine elektromagnetische Wellen abstrahlen (nach klassischer Elektrodynamik müssten sie es tun)
- Warum Atome nicht bei jeder Wellenlänge Licht absorbieren bzw. emittieren können
- Warum Atome in erster Näherung Kugeln und keine Scheiben sind

Die Emission von Licht durch Atome lässt sich durch Balmer-Serien beschreiben. z.B. bei Wasserstoff gilt:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

wobei  $R_H$  die Rydberg-Konstante und  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist.

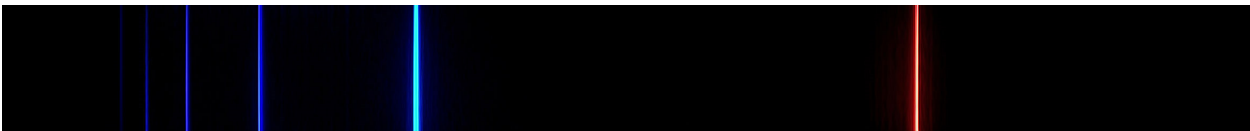


Abbildung 13: Balmer-Serie[5]

### Termschema nach Ritz

Sämtliche Linien der Absorption bzw. Emission lassen sich auf die Kombination zweier Terme zurückführen.

$$\frac{1}{\lambda} = T_1 - T_2$$

### Bohr'sches Atommodell

- Elektronen umkreisen den positiven Kern auf kreisförmigen oder elliptischen Bahnen, *wir betrachten nur Kreisbahnen*
- Die Kreisbahnen unterscheiden sich voneinander in der Energie der Elektronen
- Ein Elektron kann von Kreisbahn zu Kreisbahn wechseln, indem es Licht absorbiert oder emittiert, dessen Frequenz  $= \frac{\Delta E}{h}$  ist.

- Auf der Kreisbahn herrscht Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und elektrostatischer Anziehungskraft
- erlaubt sind nur Kreisbahnen deren Drehimpuls  $r \times \vec{p}$  ein Vielfaches von  $\frac{h}{2\pi}$  ist
- auf diesen Kreisbahnen strahlen die Elektronen keine elektromagnetische Strahlung ab

Drehimpuls ist ein Vielfaches von  $\frac{h}{2\pi}$ :

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \Leftrightarrow 2\pi r = \frac{nh}{p} = n\lambda$$

Wobei der letzte Schritt mit Hilfe der de-Broglie-Beziehung erfolgt.

Diese Bedingung lässt sich so deuten, dass der Umfang der Kreisbahn ein Vielfaches der Wellenlänge des Elektrons ist.

### Berechnung der charakteristischen Absorptionen / Emissionen

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \tag{1}$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{nh}{2\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{v} \tag{3}$$

$$\rightarrow v = \frac{q_1 q_2}{2h\epsilon_0 n}$$

$$v^2 = \frac{q_1^2 q_2^2}{4h^2 \epsilon_0^2 n^2}$$

Energie des Elektrons auf der Kreisbahn setzt sich zusammen aus elektrostatischer Energie und kinetischer Energie

$$\Delta E_{\text{elektrostat}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta E_{\text{kinetisch}} = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta E_{\text{gesamt}} = \frac{1}{2} m(v_1^2 - v_2^2)$$

Das Tauschen der Geschwindigkeit in der Klammer durch Addition

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \frac{q_1^2 q_2^2}{4h^2 \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Für Wasserstoff:

$$\frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{m_e e^4}{8h^3 c \epsilon_0^2}}_{\text{Rydberg-Konstante}} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Das Bohrsche Modell stimmt mit den beobachteten Spektren überein und wurde nachträglich zusätzlich durch den Frank-Hertz-Versuch bestätigt. Es erklärt aber immer noch nicht, warum Atome keine Scheiben sind und warum die Elektronen keine Energie verlieren. Es erklärt auch nicht, warum das unterste Niveau kein magnetisches Moment hat.

In Verbindung mit der de-Broglie-Beziehung, die ca. 1 Jahr später aufgestellt wurde, führte das Bohrsche Modell in eine Betrachtungsweise ein, in der das Elektron als stehende Welle aufgefasst wurde.

Die Beschreibung eines Teilchens als Welle funktioniert zunächst einmal, wenn wir das Teilchen auf einen Kreis setzen und uns über Anfang und Ende der Welle keine Gedanken machen müssen.

Bei einem Teilchen, das sich frei im Raum bewegt, können wir entweder annehmen, es sei eine unendlich

ausgedehnte Welle (dann kann es überall sein), oder wir können annehmen, dass es ein Wellenzug ist.



Abbildung 14: Vergleich unendliche Wellen - Wellenzug

Vergleich mit der Akustik: eine schwingende Geigensaite, die ständig angeregt wird, sendet eine unendlich ausgedehnte Welle, ein explodierender Knallkörper einen Wellenzug.

Wenn wir annehmen, dass ein Teilchen durch einen endlichen Wellenzug beschrieben werden kann, so können wir diesen Wellenzug als eine unendliche Summe unendlicher Wellen auffassen. Dies bedeutet, dass unser Teilchen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit einen von der De-Broglie-Beziehung abweichenden Impuls hat.

$$\delta x \cdot \delta p = \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

$$\delta x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\delta p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

## 2 Schrödingers Interpretation der Wellennatur eines Teilchens

$$\Psi(x) = a \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + i \cdot a \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x$$

mit der Eulerschen Relation:

$$\Psi(x) = a \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$$

Einsetzen der De-Broglie-Beziehung:

$$\Psi(x) = a \exp\left(i \frac{2\pi \cdot x \cdot p}{h}\right) = a \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot x \cdot p\right)$$

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} = a \frac{i}{\hbar} p \exp\left(\frac{ixp}{\hbar} = \frac{i}{\hbar} \cdot \Psi \cdot p\right)$$

$$p \cdot \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi$$

Das gilt nur für unendliche Wellen, deren Wellenlänge ortsunabhängig ist und somit auch  $p$  ortsunabhängig ist.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = a \left(\frac{i \cdot p}{\hbar}\right)^2 \exp\left(i \frac{x \cdot p}{\hbar}\right) = \frac{-p^2}{\hbar^2} \Psi$$

Aus der klassischen Mechanik kennen wir die Hamilton-Funktion

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{V(x)}_{\text{potentielle Energie}} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + V(x)$$

Schrödinger postuliert, dass wir die klassische Mechanik auf die Beschreibung von Teilchen als Welle übertragen können, indem wir die klassischen Größen - Ort und Impuls - durch „Operatoren“ ersetzen können.

- Ort  $\rightarrow$  Ort  $\cdot$  Wellenfunktion

- Impuls  $\rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  Wellenfunktion
- potentielle Energie  $\rightarrow$  potentielle Energie  $\cdot$  Wellenfunktion

Dies bedeutet, dass die Hamilton-Funktion durch folgende Funktion zu ersetzen ist:

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + V(\Psi) \quad \text{zeitunabhängige Schrödingergleichung}$$

$$E\Psi = \underbrace{\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right)}_H \Psi$$

Wobei  $H$  der Hamilton-Operator ist.

$$E\Psi = H\Psi$$

Schrödinger geht weiter, indem er annimmt, dass eine Welle ein komplexes dreidimensionales Gebilde sein kann.

Daher wird aus  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi \\ &= \nabla^2 \Psi \end{aligned}$$

Wobei  $\nabla$  der Laplace-Operator ist.

## 2.1 Zeitabhängigkeit

$$\begin{aligned} a &= a_0 \exp\left(-i \frac{t}{\tau}\right) \\ &= a_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \epsilon \cdot t\right) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \epsilon \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \epsilon t\right) = -\frac{i}{\hbar} \epsilon \Psi \\ i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \epsilon \Psi \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass  $\epsilon$  gleich der Energie unseres Teilchens ist.

$$\Rightarrow H\Psi = E\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{zeitabhängige Schrödinger-Gleichung}$$

In der Schrödinger-Gleichung ordnen wir einem Teilchen eine Wellenfunktion  $\Psi$  zu. Diese erstreckt sich über den gesamten Raum und hat an jeder Stelle im Raum einen Wert, der im allgemeinen von Ort und der Zeit abhängt.

Schrödinger hat gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \text{Impuls} &= \frac{1}{\Psi} \cdot i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Psi \quad (\text{für einen eindimensionalen Fall}) \\ \text{Impuls}^2 &= \frac{1}{\Psi} \cdot (-\hbar^2) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \\ \text{kinetische Energie} &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\Psi} \cdot (-\hbar^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \end{aligned}$$

Die potentielle Energie  $V$  ist keine Funktion der Wellenfunktion. Wollen wir also die Gesamtenergie erhalten:

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\text{Hamilton-Operator } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V} \cdot \Psi + V \cdot \Psi = E \cdot \Psi$$

Die zeitliche Ableitung der Wellenfunktion ergibt wiederum die Energie

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = E\Psi$$

Man kann deshalb schreiben

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot \Theta(t)$$

## 2.2 Bornsche Interpretation der Schrödingergleichung

Die Wahrscheinlichkeit unser Teilchen in einem Volumen zwischen  $x_1$  und  $x_2$ ,  $y_1$  und  $y_2$ ,  $z_1$  und  $z_2$  zu finden sei:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = P = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \Psi^* \cdot \Psi dz dy dx$$

Wobei  $\Psi^*$  die konjugiert komplexe Zahl zu  $\Psi$  ist:

$$\begin{aligned} \Psi &= a + ib \\ \Psi^* &= a - ib \\ \Psi^* \Psi &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Die Bornsche Interpretation bietet zwei Vorteile:

- wir haben eine anschauliche Möglichkeit, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit unseres Teilchens auszudrücken
- Wir schränken uns in der Lösung der Schrödingergleichung auf Funktionen ein, deren Raumintegral  $\Psi^* \Psi$  gleich 1 ist

Allgemeine Erwartung an die Lösungen der Schrödingergleichung:

- Zeitabhängigkeit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = E\Psi$$

- an jedem Ort verlaufen die zeitlichen Änderungen synchron
- die Zeitabhängigkeit des Realteils ist dann am größten, wenn der Wert des Imaginärteils am größten ist.  $\rightarrow \Psi^* \Psi$  kann zeitlich konstant sein, auch wenn die Wellenfunktion zeitabhängig ist.

- Ortsabhängigkeit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E\Psi - V\Psi$$

- $\Psi$  muss eindeutig, integrierbar (integrierbar) und normiert sein
- $\Psi$  muss stetig und überall dort, wo  $\Psi$  nicht null ist, zweifach differenzierbar sein.
- —Krümmung—  $\sim |\Psi|$
- Krümmung richtet sich danach, ob  $E > V$  ist oder umgekehrt:

$$\begin{aligned} E > V &\rightarrow \text{Krümmung} \sim -\Psi \\ E < V &\rightarrow \text{Krümmung} \sim \Psi \end{aligned}$$

- $\Psi$  ist nicht automatisch gleich null, wenn  $E < V$

Unsere Erwartung als Skizze:

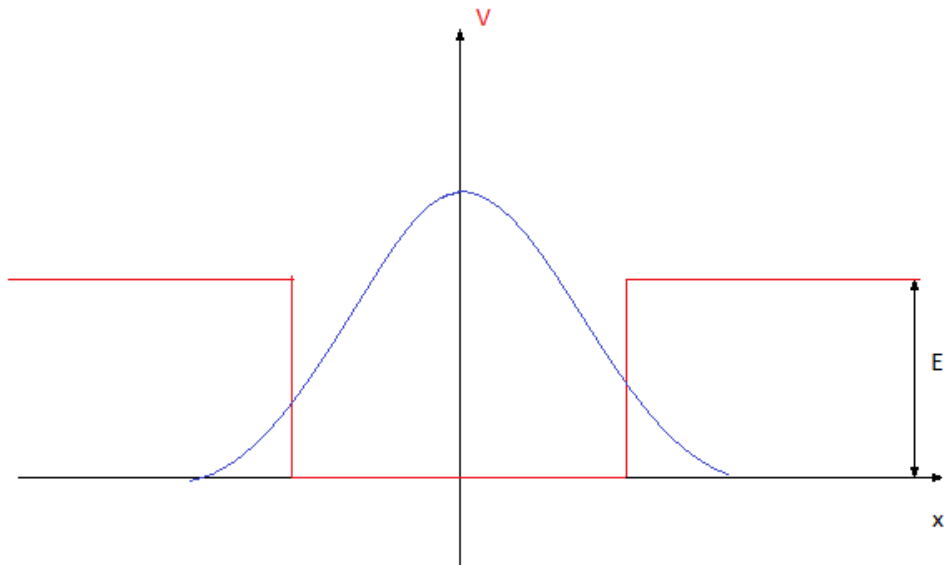


Abbildung 15: Die Krümmung der blauen Kurve ändert sich an dem Schnittpunkt mit der roten Funktion

### 3 Lösungen der Schrödinger-Gleichung

#### 3.1 Lösung für das Teilchen im Kasten

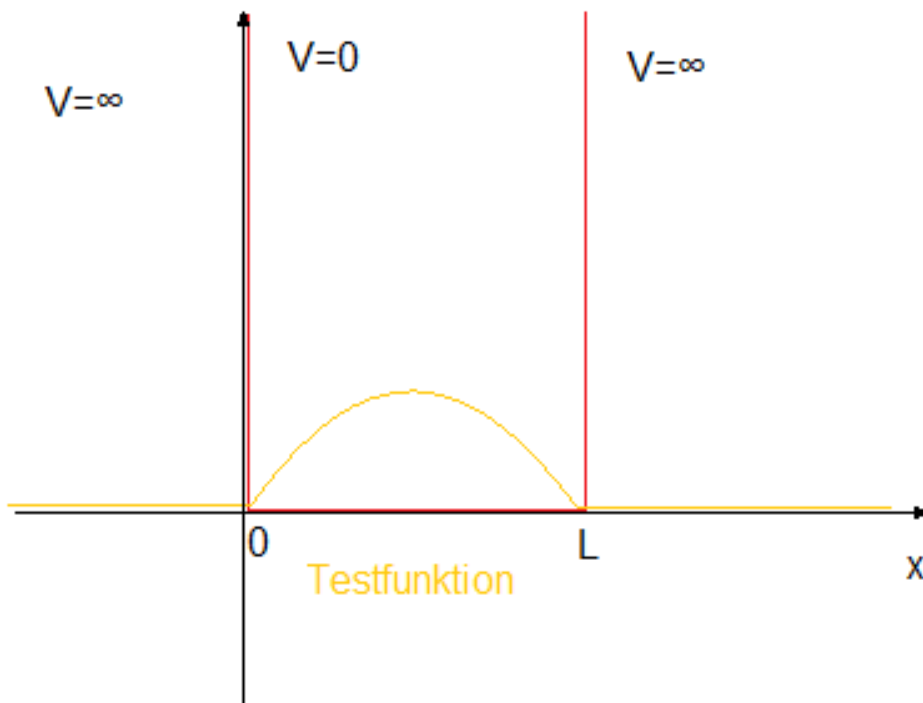


Abbildung 16: Skizze zur Aufgabenstellung

$$H\Psi = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi$$

Testfunktion:

$$\Psi = c \cdot \cos(kx) + d \cdot \sin(kx)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\Psi(x=0) &= 0 \Rightarrow C = 0 \\ \Psi(x=L) &= 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ E &= \frac{k^2 \cdot \hbar^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}\end{aligned}$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sin(kx) &= k \cos(kx) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(kx) &= -k^2 \sin(kx)\end{aligned}$$

Mit der Bedingung, dass das Integral unter der Kurve 1 ist:

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^L \Psi \Psi^* dx = \int_0^L D^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= D^2 \left[ \frac{1}{2}L - \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{L}L\right)}{4\frac{n\pi}{L}L} - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{L}0\right)}{4\frac{n\pi}{L}0} \right] \\ &= \frac{1}{2}D^2L \\ \Rightarrow D &= \sqrt{\frac{2}{L}} \quad \text{oder} \quad D = -\sqrt{\frac{2}{L}} \quad \text{oder} \quad D = \sqrt{-\frac{2}{L}} \quad \text{oder} \quad D = -\sqrt{-\frac{2}{L}}\end{aligned}$$

### 3.2 Lösung für den harmonischen Oszillator

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

Wobei  $k$  die Federkonstante ist. Aus der klassischen Mechanik wissen wir:  $\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi v$  ( $v$  = Schwingungsfrequenz)

$$\Rightarrow \hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + \frac{1}{2}kx^2\Psi = E\Psi \quad (4)$$

Wir definieren:

$$y = \left(\frac{\sqrt{k \cdot m}}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x \Rightarrow x^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{k \cdot m}} y^2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\sqrt{k \cdot m}}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{k \cdot m}}{\hbar} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6)$$

Aus (4),(5) und (6) folgt:

$$\begin{aligned}-\hbar \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi + \hbar \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} y^2 \Psi &= E\Psi \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi - y^2 \Psi &= -2 \underbrace{\sqrt{\frac{mE}{k \hbar}}}_{\lambda} \Psi\end{aligned}$$

Wobei  $\lambda$  ein Parameter ist.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi - y^2 \Psi = -\lambda \Psi$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)}_{\hat{a}} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)}_{\hat{a}^\dagger} \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi - y\Psi\right) \stackrel{1}{=} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi + y \frac{\partial}{\partial y} \Psi - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(y\Psi)}_{\text{Kettenregel anwenden führt zu}} - \Psi \frac{\partial}{\partial y} y - y \frac{\partial}{\partial y} \Psi - y^2 \Psi$$

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{a}^\dagger \Psi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 - 1\right) \Psi \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} \Psi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 + 1\right) \Psi \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} \Psi &= \hat{a}\hat{a}^\dagger \Psi + 2\Psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi - y^2 \Psi &= -\lambda \Psi \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi - y^2 \Psi + 1 &= -(\lambda - 1) \Psi \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} \Psi &= -(\lambda - 1) \Psi \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\Psi}_\lambda &= \hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{\Psi}_\lambda + 2\hat{\Psi}_\lambda \\ &= -(\lambda - 1)\hat{\Psi}_\lambda + 2\hat{\Psi}_\lambda \\ &= -(\lambda - 3)\hat{\Psi}_\lambda \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} \Psi_{\lambda-2} &= -([\lambda - 2] - 1) \Psi_{\lambda-2} \\ &= -(\lambda - 3)\Psi_{\lambda-2} \\ &\Rightarrow \Psi_{\lambda-2} = \hat{a}\Psi_\lambda \end{aligned}$$

Das heißt, es sind Serien an Werten für  $\lambda$  und zugehörigen Wellenfunktionen  $\Psi$  zulässig, die sich auseinander ergeben.

analog:

$$\hat{a}^\dagger \Psi_\lambda = \Psi_{\lambda-2}$$

Deswegen heißt  $\hat{a}$  Abbauoperator und  $\hat{a}^\dagger$  Aufbauoperator.

Zunächst einmal sieht es so aus, als ob wir durch beliebig häufiges Anwenden des Operators  $\hat{a}$  zu negativen Eigenwerten und somit zu negativen Energien des harmonischen Oszillators gelangen könnten.

Wir fordern deshalb:

$$\begin{aligned} \hat{a}\Psi_{\lambda_{\min}} &= 0 \\ \hat{a}^\dagger \hat{a}\Psi_{\lambda_{\min}} &= -(\lambda_{\min} - 1)\Psi_{\lambda_{\min}} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{\min} = 1 \\ &\Rightarrow \lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \dots = 1 + 2n(n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} \lambda = \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\frac{1}{2} + n\right)$$

Das heißt: es gibt diskrete Lösungen mit Wellenfunktionen  $\dots, \Psi_{\lambda+2}, \Psi_\lambda, \Psi_{\lambda-2}, \dots$   
Daher ist die Energie gequantelt auf äquidistanten Niveaus mit  $\Delta\lambda = 2$ .

$$\Delta E = \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} = \hbar 2\pi\nu = h\nu$$

$$\begin{aligned}\hat{a}\Psi_{n=0} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\Psi_{n=0} &= -y\Psi_{n=0} \\ \Psi_{n=0} &= N_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\Psi_{n=0} &= N_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 2y\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_n &= N_n (\hat{a}^\dagger)^n \Psi_0 \\ \Psi_0 &= N_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ \Psi_1 &= N_1 (2y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ \Psi_2 &= N_2 (4y^2 - 2) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ \Psi_3 &= N_3 \underbrace{(8y^3 - 12y)}_{\text{Hermitsche Polynome, } H_{n+1}=2 \cdot y \cdot H_n - 2 \cdot n \cdot H_{n-1}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\end{aligned}$$

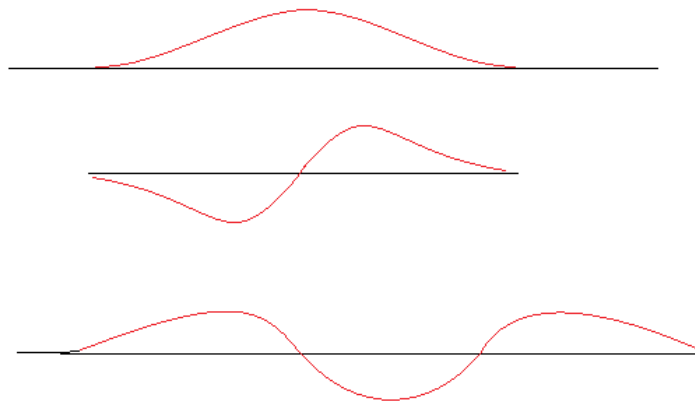


Abbildung 17: Skizze zu den ersten 3 Wellenfunktionen

### 3.3 Teilchen auf einer Kreisbahn

$$\begin{aligned}V &= 0 \\ \hat{H} &= -\frac{\hbar}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{\hbar}{2m} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}}_{=0 \text{ wenn Radius konstant}} \right) \\ &= -\frac{\hbar}{2mr^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\end{aligned}$$

Wobei  $I$  das Trägheitsmoment ist.

$$\begin{aligned}\Phi &= A \exp(i \cdot m_l \cdot \phi) + B \exp(-i \cdot m_l \cdot \psi) \\ &\Rightarrow m_l \text{ muss eine ganze Zahl sein} \\ E\Phi &= \hat{H}\Phi = \frac{\hbar^2}{2I} \cdot m_l^2\end{aligned}$$

Wenn wir also von einem Zustand auf einen höheren Zustand wechseln, brauchen wir nicht jedes mal die gleiche Energie, wie in dem Beispiel des harmonischen Oszillators.

Normierung:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, B = 0 \text{ oder } A = 0, B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

### 3.4 Teilchen auf einer Kugeloberfläche

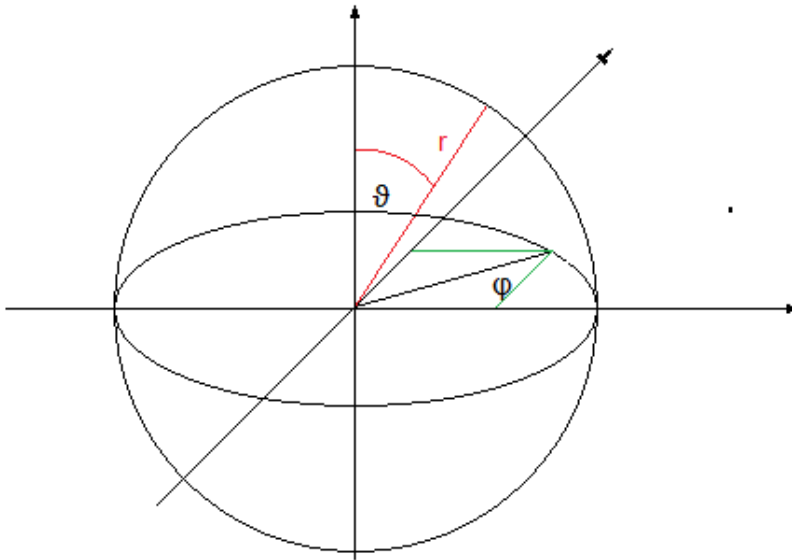


Abbildung 18: Teilchen auf der Kugeloberfläche

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2I}\lambda^2$$

mit

$$\lambda^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}Y_{l,m_l} &= \Theta_{l,m_l}(\vartheta) \cdot \Phi_{m_l}(\phi) \\ Y(\vartheta, \phi) &= \Theta_{l,m_l}(\vartheta) \cdot \Phi_{m_l}(\phi)\end{aligned}$$

Wobei  $\Theta$  die Legendre-Funktion ist.

$l$	$m_l$	$Y_{l,m_l}$
0	0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \vartheta$
1	$\pm 1$	$\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \vartheta \exp(\pm i\phi)$
2	0	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$
2	$\pm 1$	$\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta \exp(\pm i\phi)$
2	$\pm 2$	$\mp \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta \exp(\pm 2i\phi)$
...	...	...

Tabelle 1: Lösungen in Abhängigkeit der Werte von  $l$  und  $m_l$

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$$

$$\text{Drehimpuls} = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

$$\text{z-Komponente des Drehimpuls} = m_l^2 \cdot \hbar$$

- Wir erhalten Wellenfunktionen, die von 2 Quantenzahlen abhängen. Die Zahl der Knotenlinie im Realteil entspricht der Quantenzahl  $l$ , die Zahl der „senkrecht“ gehenden Knotenlinien des Realteils entspricht der Quantenzahl  $m_l$ .
- Einige der Wellenfunktionen haben die gleiche Energie (d.h. sie sind degeneriert). Anstelle dieser Wellenfunktion sind auch Linearkombinationen dieser degenerierten Wellenfunktionen Lösungen der Schrödingergleichung. Besonders vorteilhaft ist es, die Kombination  $Y_{l,m_l} \pm Y_{l,-m_l}$  zu betrachten. Diese ist entweder rein real oder rein imaginär und hat auch Knotenebenen in  $\Psi^* \Psi$ .

$$\text{Drehimpuls} = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

$$\text{z-Komponente des Drehimpuls} = m_l^2 \cdot \hbar$$

Aus der Quantelung des Drehimpulses und seiner z-Komponente folgt: Der Betrag ist stets höher als die z-Komponente. Das heißt, der Drehimpuls kann nicht parallel zur z-Achse ausgerichtet sein.

## 4 Das Wasserstoffatom

Im Vergleich zum vorherigen Fall hat ein Elektron im Wasserstoffatom die Freiheit sich auf beliebigen Abstand zum Kern zu bewegen. Die potentielle Energie für unseren Hamilton-Operator wird somit durch die elektrostatische Anziehung gegeben:

$$V = \frac{-e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

$$H\Psi = E\Psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Psi = E\Psi$$

In Kugelkoordinaten wird aus  $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \cdot r + \frac{1}{r^2} \Lambda^2$$

Wobei für  $\Lambda^2$  gilt:

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)$$

Damit folgt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \Psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \Lambda^2 \Psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Psi = E\Psi$$

Ansatz: wir wählen  $\Psi(r, \vartheta, \phi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \phi)$

$$\begin{aligned} \Delta^2 RY &= R \underbrace{\Delta^2 Y}_{-l(l+1)Y \text{ aus Teilchen auf Kugeloberfläche}} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} rRY &= Y \frac{\partial^2}{\partial r^2} rR \\ -Y \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} rR + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} l(l+1)RY - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} RY &= ERY \end{aligned}$$

Kürzen von Y möglich, da kein Operator darauf angewendet wird. Multiplizieren beider Seiten mit  $r$  und  $rR = P$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} P + \underbrace{\left( \frac{\hbar^2}{2mr} l(l+1) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)}_{V^*} P = EP$$

Dies entspricht einer Schrödingergleichung mit einem modifizierten Term für V. In diesem Term steckt die kinetische Energie der radialen Bewegung.

$$E_{\text{kin, radial}} = \frac{1}{2} m v_{\text{rad}}^2 = \frac{1}{2mr^2} \cdot (v_{\text{rad}} mr)^2 = \frac{\text{Drehimpuls}^2}{2mr^2} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

Lösung: assoziierte Laguerre-Funktionen,  $R(r)$  hängt von 2 Quantenzahlen ab ( $n, l$ ), ebenso wie  $Y$  wie oben gezeigt von 2 Quantenzahlen abhängt ( $l, m_l$ ).

konventionelle Bezeichnung	n	l	R
1s	1	0	$\left(\frac{z}{a}\right)^{3/2} \cdot 2 \cdot \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$
2s	2	0	$\left(\frac{z}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (2 - \rho) \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$
2p	2	1	$\left(\frac{z}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot (\rho) \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$
3s	3	0	$\left(\frac{z}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot (6 - 6\rho + \rho^2) \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$
3p	3	1	$\left(\frac{z}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{9\sqrt{6}} \cdot (4 - \rho) \cdot \rho \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$
3d	3	2	$\left(\frac{z}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{9\sqrt{30}} \cdot \rho^2 \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$

Tabelle 2: Lösungen für  $R$  in Abhängigkeit von  $n$  und  $l$

Wobei  $\rho = \frac{2z}{na} \cdot r$ ,  $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m \cdot e^2}$  ist.  $a$  ist der Bohrsche Radius (der Radius des Elektrons im Grundzustand des Bohrschen Wasserstoffatoms).

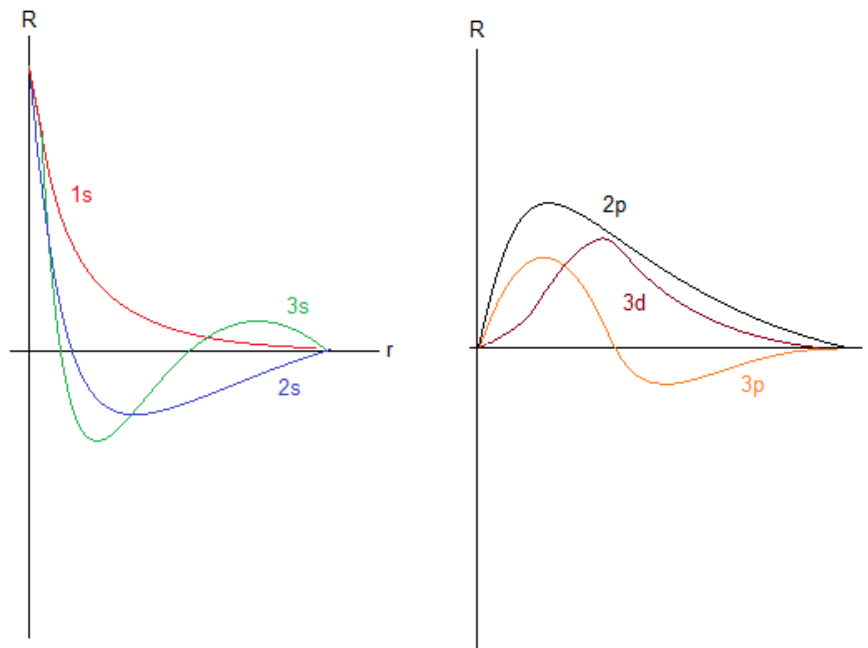


Abbildung 19: R-r-Diagramm

Eine jede Wellenfunktion, die ein Elektron in einem Atom oder Molekül beschreibt, nennt man Orbital. Sie ist im Allgemeinen eine komplexe Funktion des dreidimensionalen Raumes. Sie ist somit grafisch schwer darstellbar. Man kann die Darstellung vereinfachen, in dem man  $\Psi^* \cdot \Psi$ , d.h. die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, betrachtet. Manchmal stellt man Orbitale als zweidimensionale Projektion einer „Wolke“ dar, deren Schwärzung proportional zu  $\Psi^* \cdot \Psi$  ist.

Meist wählt man jedoch iso-Flächen, das heißt Oberflächen mit identischer Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte. Diese werden häufig so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb der iso-Fläche zu finden, 90 % beträgt. Die unterschiedlichen Vorzeichen des Realteils der Wellenfunktion werden meist durch unterschiedliche Farbgebung gekennzeichnet.

Beispiel:

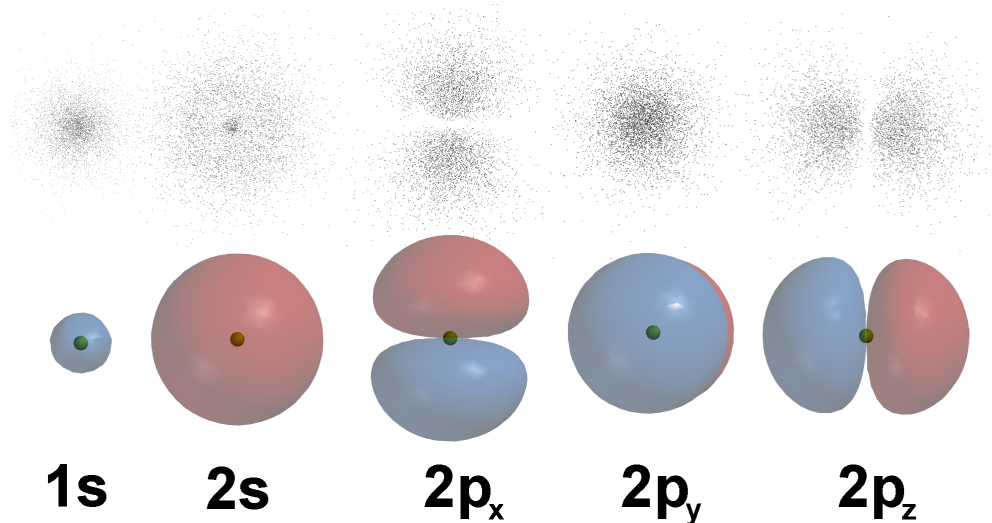


Abbildung 20: Grafische Darstellung der *s*- und *p*-Orbitale [6]

## 4.1 Das Erscheinungsbild der Orbitale mit niedrigen Quantenzahlen:

### 4.1.1 s-Orbitale

$$l = 0$$

$\Psi$  ist real

$\Psi^* \cdot \Psi$  ist kugelsymmetrisch.

$n - 1 =$  Zahl der kugelförmigen Knotenflächen.

### 4.1.2 p-Orbitale

$$l = 1, m_l = 0$$

$\Psi$  ist real,  $\Psi^* \cdot \Psi$  ist hantelförmig.

$n - 1 =$  Zahl der kugelförmigen Knotenflächen

$$l = 1, m_l = \pm 1$$

$\Psi$  ist komplex

$\Psi^* \cdot \Psi$  gleicht einem Torus, zusätzlich gibt es eine Knotenlinie, die auf der  $z$ -Achse liegt. Durch eine Linearkombination von  $\Psi_{l=1, m_l=+1} + \Psi_{l=1, m_l=-1}$  bzw.  $i(\Psi_{l=1, m_l=+1} - \Psi_{l=1, m_l=-1})$  erhalten wir die uns bekannten  $p_x$  und  $p_y$ -Orbitale

### 4.1.3 d-Orbitale

$$l = 2, m_l = 0$$

$\Psi$  ist real

$\Psi^* \cdot \Psi$  gleicht einer Hantel, deren Taille von einem Torus umgeben ist - das  $d_{z^2}$ -Orbital

$$l = 2, m_l = \pm 1$$

$\Psi$  ist komplex

$\Psi^* \cdot \Psi$  gleicht zwei Tori oberhalb und unterhalb der  $x - y$ -Ebene, der Realteil hat eine Knotenebene, die parallel zur  $z$ -Achse verläuft. Aus der Linearkombination der zwei Wellenfunktionen ergeben sich zwei neue Orbitale, die Kleeblättern gleichen - dadurch entstehen  $d_{xz}$ - und  $d_{yz}$ -Orbitale.

$$l = 2, m_l = \pm 2$$

$\Psi$  ist komplex

$\Psi^* \cdot \Psi$  gleicht einem Torus. Der Realteil hat zwei Knotenebenen, die senkrecht zueinander stehen. Die Linearkombination der zwei Wellenfunktionen mit  $m_l = +2$  bzw.  $m_l = -2$  ergeben erneut zwei Orbitale, die ebenfalls Kleeblättern ähneln - dadurch entstehen  $d_{xy}$  und  $d_{x^2-y^2}$

## 4.2 Elektronische Übergänge im Wasserstoffatom

Lösung der Schrödinger-Gleichung:

$$E = - \left( \frac{\mu e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2}$$

Wobei  $\mu$  die reduzierte Masse darstellt.

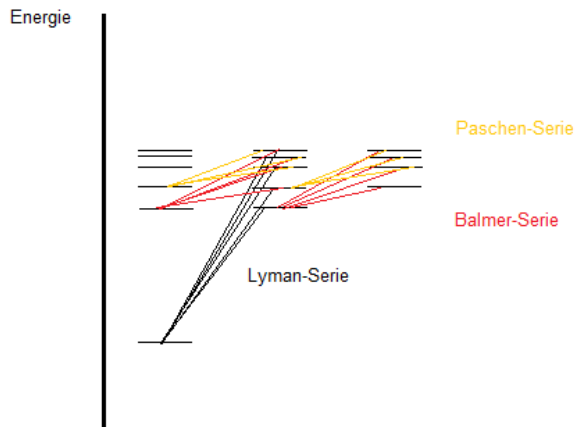


Abbildung 21: Grotian-Diagramm - eingezeichnet sind einige erlaubte Übergänge

### 4.3 Übergänge in schwereren Atomen

Bei Atomen mit mehr als einem Elektron erhöht sich die Kernladungszahl (und die Masse des Kerns). Solange diese Atome nur ein Elektron besitzen würden (das heißt wir ein  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ ,  $\text{Be}^{3+}$  ... -Ion betrachten würden), so hätte dies allein den Effekt, dass die Wellenfunktionen „kompakt“ würden.

Hat das Atom mehr als ein Elektron, so müssen wir die Wechselwirkung der Elektronen untereinander berücksichtigen.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_2^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi r_{12}}$$

### 4.4 Slater-Orbitale

Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass die Wellenfunktionen mit niedriger Quantenzahl und die mit hoher Quantenzahl gering überlappen. Es scheint, als würden die zu einer Quantenzahl gehörigen Wellenfunktionen ihre Hauptaufenthaltswahrscheinlichkeit in Kugelschalen um den Kern anordnen. Daher können wir vereinfachend annehmen, dass ein jedes Elektron in einem niedrigeren Quantenzustand als dem gerade betrachteten den Kern abschirmt.

Das heißt, wir können die Wellenfunktion annähernd berechnen, indem wir für jedes Elektron in niedrigeren Orbital von der Kernladung einen Betrag nahe 1 abziehen, für jedes Elektron mit gleicher Hauptquantenzahl einen Betrag nahe 0,5 abziehen. Allerdings müssen wir hierbei doch feiner vorgehen und den Betrag nach den Nebenquantenzahlen richten.

### 4.5 Hartree-Fock-Selbstkonsistentes Feld

Man startet mit einer sinnvollen Annahmen über die Wellenfunktion eines jeden Elektrons (z.B. mit den Slater-Orbitalen) und berechnet numerisch eine Wellenfunktion die die beste Lösung ist, für das von den anderen Wellenfunktionen mit bestimmten Potential. Diese numerische Suche nach der besten Wellenfunktion wird nacheinander für jedes Elektron durchgeführt und so oft wiederholt, bis sich an den Wellenfunktionen von Iteration zu Iteration nur noch marginale Änderungen ergeben.

## Literatur

- [1] <http://commons.wikimedia.org/w/thumb.php?f=Bragg.svg&width=500px>, Abgerufen 02.11.2009
- [2] <http://commons.wikimedia.org/w/thumb.php?f=Beugungsgitter.svg&width=500px>, Abgerufen 02.11.2009
- [3] [http://www.old.uni-bayreuth.de/departments/didaktikchemie/umat/beugung\\_interferenz/beugung\\_doppelspalt.gif](http://www.old.uni-bayreuth.de/departments/didaktikchemie/umat/beugung_interferenz/beugung_doppelspalt.gif), Abgerufen am 02.11.2009
- [4] [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/80/Rutherfordscher\\_Streuversuch.svg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/80/Rutherfordscher_Streuversuch.svg), Abgerufen am 02.11.2009
- [5] [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/21/Visible\\_spectrum\\_of\\_hydrogen.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/21/Visible_spectrum_of_hydrogen.jpg), Abgerufen am 09.11.2009
- [6] <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9b/A0s-3D-dots.png>, Abgerufen am 04.01.2010