Mathematik des Investment Banking Sommersemester 2010
Prof. Dr. Luderer

Übung 10: Optionen

1. **(Optionsbewertung nach Cox/Ross/Rubinstein)** Es werde ein europäischer Aktiencall betrachtet mit Aktienkurs $K_0 = 140$, Strikepreis $X = 160$, Schätzungen $K_{1a} = 110$, $K_{1b} = 210$ für $T = 1$ und einem risikolosen Zinssatz von 10 %. Man zeige, dass bei einem vom korrekten Optionspreis $P_C = 20$ abweichenden Preis (z. B. 10) ein risikoloser Gewinn erzielt werden kann.

2. **(Optionsbewertung nach Cox/Ross/Rubinstein)** Betrachtet werde ein Aktiencall in folgender Situation: Laufzeit 1 Jahr, $K_0 = 220$, aller halben Jahre verdoppele oder halbiere sich der Aktienkurs, der risikolose Zinssatz betrage pro Halbjahr 10 %, pro Jahr also 21 %, der Strikepreis liege bei $X = 165$. Man berechne den Wert des Calls in $t = 1$ (innerer Wert), $t = 0,5$ und $t = 0$ (Preis des Calls).

3. **Optionspreise nach Black/Scholes**

$$P_c = P_{\text{Aktie}} \cdot \Phi(d_1) - S \cdot e^{-it} \cdot \Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \sigma^2 \cdot \frac{t}{2} \right], \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it - \sigma^2 \cdot \frac{t}{2} \right]$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist (siehe Formelsammlung), P_{Aktie} - Kurs der Aktie, S - Strikepreis, i - risikoloser Zinssatz (bei kontinuierlicher Verzinsung), t - Restlaufzeit.

a) Man berechne den Optionspreis für $t = 1$, $P_{\text{Aktie}} = 220$, $S = 165$, $\sigma = 0,98$, $i = 21\,\%$.

b) Für $t = 1$, $P_{\text{Aktie}} = 100$, $\sigma = 0,5$, $i_{kont.} = 10\,\%$ und verschiedene Basispreise S (z. B. $S = 200$, $S = 100$, $S = 80$, $S = 50$, $S = 10$) berechne man jeweils den Preis eines Calls und interpretiere diesen.

4. **(The Greeks)**

a) Man berechne die partielle Ableitung $\Delta = \frac{\partial P_c}{\partial P_{\text{Aktie}}}$ und interpretiere diese Größe.

b) Stimmt es, dass *at the money* $\Delta \approx 0,5$ gilt? Wann ist Δ exakt gleich 0,5?

c) Man weise die Gültigkeit der Beziehung $P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) = Se^{-it}\varphi(d_2)$ nach.

d) Man berechne die Größen Gamma, Theta sowie $\frac{\partial P_c}{\partial S}$ und interpretiere diese.

5. (Put-Call-Parität)

a) Was versteht man unter der Put-Call-Parität?

b) Man beschreibe, wie man mit Hilfe zweier Portfolios den Wert eines Aktienputs ermitteln kann.

c) Man berechne die Put-Preise in den Situationen von Aufgabe 1 b).