Mathematik des Investment Banking
Prof. Dr. Luderer

Übung 6: FRA und Swaps - Lösungen

1. Berechnung des FRA-Satzes:

$$1 + i_2\,(s+t) = (1 + i_1\,s)\,(1 + i_f\,t)$$

Ausgleich der Zinsdifferenz am Laufzeitbeginn: Käufer finanziert den Finanzbedarf N zum Referenzinssatz i_{ref}

$$\textit{Zinsdifferenz} := N\,(i_{ref} - i_f)\,t$$

Der Barwert am Laufzeitbeginn ist die Ausgleichszahlung:

$$\textit{Ausgleich} := \frac{N\,(i_{ref} - i_f)\,t}{1 + i_{ref}\,t}$$

Konkret: $i_f = 0,04$, $N = 10000000$, $t = \frac{182}{360}$,
$i_{ref} = 5\%$: Unternehmer erhält Ausgleich und nimmt am Geldmarkt Kredit zu 5% auf.
Ausgleich: $(10000000 - A) * (1 + 0,05\frac{182}{360}) = 10000000(1 + i_f\frac{182}{360})\ A = 49309,13$
Der Einstand beträgt 4%:
$i_{ref} = 3\%$: Unternehmer zahlt Ausgleich und nimmt am Geldmarkt Kredit zu 3% auf.
Ausgleich: $(10000000 - A) * (1 + 0,03\frac{182}{360}) = 10000000(1 + i_f\frac{182}{360})\ A = -49800,25$
Ebenfalls Einstand 4%:
Allgemein:

$$(N - \frac{N\,(i_{ref} - i_f)\,t}{1 + i_{ref}\,t})\,(1 + i_{ref}\,t) =$$
$$N\,(1 + i_f\,t)$$

D.h. es wird zum FRA-Satz finanziert.
2. a) Forward-Zinssatz i_f (für Zeitraum 6×12): $K\left(1 + 0,0209 \cdot \frac{182}{360}\right)\left(1 + i_f \cdot \frac{182}{360}\right) = K\left(1 + 0,0216 \cdot \frac{364}{360}\right)$
$i_f = 0,02236\,\% \approx 2,24\,\%$
Ausgleichsbetrag: $A = \frac{N \cdot (i_{ref} - i_f) \cdot t}{1 + i_{ref} \cdot t}$ Da auch Zinszahlung nach einem halben Jahr mit abzusichern ist, gilt
$N = 100\,\text{Mio} \cdot \left(1 + 0,0206 \cdot \frac{182}{360}\right) = 101,04144440$ d.h.
$A = \frac{101,0414\text{Mio} \cdot (0,023 - 0,022367) \cdot \frac{182}{360}}{1 + 0,023 \cdot \frac{182}{360}} = 31.960,23$
Wegen $i_{ref} > i_f$ (also $A < 0$) ist der Ausgleichsbetrag von 31.960,23 an den Käufer des FRA zu zahlen. woraus ein Finanzierungsbedarf für das 2. Halbjahr von
$B = 101,04144 - 0,03196 = 101,000985$ Mio entsteht.
Gesamtbelastung am Jahresende: $G = 101,00948 \cdot \left(1 + 0,023 \cdot \frac{182}{360}\right) = 102,1840\,\text{Mio}$ (entspricht – bis auf Rundungsfehler durch ungenaues i_f und 182 Tage für ein halbes Jahr – dem Betrag $100 \cdot (1 + 0,0216 \cdot \frac{364}{360})$).

b) Es seien i_1 der Zinssatz für die Vorlaufperiode s und i_2 der Zinssatz für die Gesamtperiode $s + t$ (Vorlaufperiode s plus Absicherungszeitraum t).
Für $i_{ref} = i_f$ ist der Ausgleichsbetrag Null, und es ergibt sich eine Gesamtzahlung in Höhe von $K(1 + i_1 \cdot s)(1 + i_f \cdot t) = K(1 + i_2(s + t))$.
Für $i_{ref} \neq i_f$ gilt:
$\left[K((1 + i_1 s) - \frac{K(1+i_1 s) \cdot (i_{ref} - i_f) \cdot t}{1 + i_{ref} t}\right] \cdot (1 + i_{ref} t)$
$= K(1 + i_1 s)(1 + i_{ref} t) - K(1 + i_1 s)(i_{ref} - i_f)t$
$= K(1 + i_1 s)\,[1 + i_{ref} t - i_{ref} t + i_f)t]$
$= K(1 + i_1 s)(1 + i_f t) = K(1 + i_2(s + t))$

Gilt hierbei $i_{ref} > i_f$, so erhält der Käufer des FRA einen Ausgleich und hat demzufolge im 2. Halbjahr weniger zu finanzieren, im umgekehrten Fall muss der Käufer selbst einen Ausgleich zahlen und entsprechend mehr finanzieren.

3. a) $i_f = 2,2367\,\%$ (siehe oben), $i_{ref} = 3\,\%$
$A = \frac{100\,\text{Mio}\,(0{,}02-0{,}022367)\cdot\frac{182}{360}}{1+0{,}06\cdot\frac{182}{360}} = -118.470,19$ Wegen $A < 0$ erhält der Verkäufer des FRA (also unser Zinsmanager) den Betrag $|A| = 118.470,19$ GE. Dieser bringt ihm (zu den „normalen“ Zinsen) $118.470,19 \cdot \left(1 + 0,02 \cdot \frac{182}{360}\right) = 1.197,87$ GE an zusätzlichen Zinsen.
b) $A = \frac{100\,\text{Mio}\cdot(0{,}03-0{,}022367)\cdot\frac{182}{360}}{1+0{,}03\cdot\frac{182}{360}} = 385.887,50$
Diesen Betrag hat der Zinsmanager an den Käufer des FRA zu zahlen, weshalb er 5765,19 GE weniger Zinsen (bezogen auf das Jahresende) erhält. Er hätte den FRA kaufen müssen.

3. Grundlage soll der Tausch eines jährlich zu zahlenden (und zu berechnenden Festzinssatzes) sein, der gegen den 6-Mon.-EURIBOR (hier: geschätzt durch die aus der Zinskurve berechneten halbjährlichen Forward-Rates) getauscht wird.
a) Berechnung der Forward Rates (als Jahreszinsrate = Halbjahresrate $\cdot$ 2):

$0 \to \frac{1}{2}$: $i_{f1} = 2 \cdot \frac{0{,}033}{2} = 3,3\,\%$

$\frac{1}{2} \to 1$: Ansatz: $\left(1 + 0,033 \cdot \frac{1}{2}\right)) \left(1 + \frac{i_{f2}}{2}\right) = 1,034 \quad \Longrightarrow \quad i_{f2} = 2 \cdot \left(\frac{1{,}034}{1{,}0165} - 1\right) = 3,4432\,\%$

$1 \to 1\frac{1}{2}$: Ansatz: $1,034 \cdot \left(1 + \frac{i_{f3}}{2}\right) = 1,0351^{1,5} \quad \Longrightarrow \quad i_{f3} = 2 \cdot \left(\frac{1{,}0351^{1,5}}{1{,}034} - 1\right) = 3,6962\,\%$

$1\frac{1}{2} \to 2$: Ansatz: $1,0351^{1,5} \cdot \left(1 + \frac{i_{f4}}{2}\right) = 1,0362^2 \quad \Longrightarrow \quad i_{f4} = 2 \cdot \left(\frac{1{,}0362^2}{1{,}0351^{1,5}} - 1\right) = 3,9125\,\%$

b) Berechnung der Diskontsätze: $d_s = \frac{1}{(1+i_s)^s}$, $s \in \mathbf{R}$, wobei i_s die Zerosätze sind; Ausnahme: $d_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot i_1}$ (Geldmarktusancen; vgl. Biermann)

$d_1 = \frac{1}{1{,}0165} = 0,98377, \quad d_2 = \frac{1}{1{,}034} = 0,96712, \quad d_3 = \frac{1}{1{,}0351^{1,5}} = 0,94957, \quad \ldots$

Fälligkeit (Jahre)	Spot Rates	Forward Rates	Diskontfaktoren	Zahlungen
0,5	3,3000	3,3000	0,98377	1,6500
1	3,4000	3,4432	0,96712	1,7716
1,5	3,5100	3,6962	0,94957	1,8481
2	3,6200	3,9125	0,93135	1,9562
2,5	3,8800	4,8673	0,90922	2,4336
3	4,1400	5,3775	0,88542	2,6887
3,5	4,4200	6,0251	0,85952	3,0125
4	4,7000	6,5731	0,83217	3,2865
4,5	4,9200	6,5882	0,80563	3,2941
5	5,1400	7,0178	0,77832	3,5089
5,5	5,3200	7,0140	0,75195	3,5070
6	5,5000	7,3648	0,72525	3,6824

c) Im Weiteren sollen d_s die Diskontfaktoren mit halbjährlicher Zählung sein und d_k die mit ganzjähriger Zählung. Dann gilt für den gesuchten Kupon p:

$$p \cdot \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{(1+i_k)^k} = \sum_{s=1}^{12} 100 \cdot \frac{i_{fs}}{2} \cdot d_s, \quad \text{d.h.} \quad p = \frac{\sum\limits_{s=1}^{12} 100 \cdot \frac{i_{fs}}{2} \cdot d_s}{\sum\limits_{k=1}^{k} d_k}.$$

Daraus ergibt sich $p = \frac{1{,}6500\cdot 0{,}98377 + 1{,}7716\cdot 0{,}96712 + \ldots}{0{,}96712 + 0{,}93135 + \ldots} = 5,3666$. Das ist der jährlich zu zahlende

Festzinssatz gegenüber dem halbjährlich zu zahlenden EURIBOR.