Übung 5: Zinsstrukturkurve - Lösungen

1. Forward Rates: $r_{fn} = \frac{(1+r_{sn})^n}{(1-r_{s,n-1})^{n-1}} - 1$
Rendite für 1 Jahr: $r_{s1} = 6,3\,\%$, Rendite für 2 Jahre: $r_{s2} = 6,05\,\%$
Forward Rate in einem Jahr (für ein Jahr): $r_{f2} = \frac{(1+r_{s2})^2}{(1+r_{s1})^1} - 1 = \frac{1{,}0605^2}{1{,}063} - 1 = 5,80\,\%$

2. Primale LOA (P):

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
 & 100x_1 & + & 98x_2 & + & 95,5x_3 & + & 101x_4 & + & 102,1x_5 & \rightarrow & \min \\
t=1: & 105x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & \geq & 100 \\
t=2: & & & 104x_2 & + & 103x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & \geq & 200 \\
t=3: & & & & & & + & 105x_4 & + & 106x_5 & \geq & 300 \\
 & & & & & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

Bemerkung: Diese Aufgabe (und also auch ihre duale) besitzt immer eine Lösung. Diese kann prinzipiell mit der Simplexmethode ermittelt werden.

Optimale Lösung: $x_1^* = 0,7399$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 1,7769$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 2,8302$, $z_P^* = 532,646$.

Der optimale ZFW gibt die minimalen Kosten zur Sicherstellung des gegebenen Cash Flow (von insgesamt 600) an.

b) Duale OA (D):

$$\begin{array}{rcrcrcl}
100y_1 & + & 200y_2 & + & 300y_3 & \rightarrow & \max \\
105y_1 & & & & & \leq & 100 \\
4y_1 & + & 104 & + & & \leq & 98 \\
3y_1 & + & 103 & + & & \leq & 95,5 \\
5y_1 & + & 5y_2 & + & 105y_3 & \leq & 101 \\
6y_1 & + & 6y_2 & + & 106y_3 & \leq & 102,1 \\
 & & & & y_i & \geq & 0
\end{array}$$

Bemerkung: Die LOA kann (nach Einführung von Schlupfvariablen relativ einfach mittels Simplexmethode gelöst werden. Noch schneller geht jedoch die Lösung unter Ausnutzung der aus der Dualitätstheorie bekannten Komplementaritätsbedingungen:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i - b_i\right) x_j^* = 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

Wegen $x_1^* > 0$, $x_3^* > 0$, $x_5^* > 0$ müssen also die 1., 3. und 5. Nebenbedingung von (D) als Gleichung erfüllt sein, was auf das folgende LGS führt:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
105y_1 & & & & & = & 100 \\
3y_1 & + & 103y_2 & & & = & 95,5 \\
6y_1 & + & 6y_2 & + & 106y_3 & = & 102,1
\end{array}$$

Hieraus ermittelt man leicht $y_1^* = 0,952381$, $y_2^* = 0,899445$, $y_3 = 0,858387$, die als Diskontfaktoren interpretiert werden können.
Der optimale duale ZF-Wert beträgt $z_D^* = 532,643$ und stimmt (bis auf geringe Rundungsfehler) mit dem primalen überein (starker Dualitätssatz).

Aus den Diskontfaktoren lassen sich die Spot Rates berechnen:

$$\begin{aligned} y_1^* &= \tfrac{1}{1+i_1} &&\Longrightarrow \quad i_1 = 5,00\% \\ y_2^* &= \tfrac{1}{(1+i_2)^2} &&\Longrightarrow \quad i_2 = 5,44\% \\ y_3^* &= \tfrac{1}{(1+i_3)^3} &&\Longrightarrow \quad i_3 = 5,22\% \end{aligned}$$

c) Die Anleihen A, C, E sind korrekt bewertet, da die NB in (D) gerade als Gleichungen erfüllt sind. Die restlichen beiden Anleihen werden jetzt mittels der in b) berechneten Spot Rates bewertet:

Anleihe B: $4 \cdot 0,952381 + 104 \cdot 0,899445 = 97,35 < 98$

Anleihe D: $5 \cdot 0,952381 + 5 \cdot 0,899445 + 105 \cdot 0,858387 = 99,39 < 101$,

d.h., der Marktpreis ist jeweils höher als die faire Bewertung.

d) Renditen:

A: $100 = \frac{105}{q} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i = 5\,\%}$

B: $98 = \frac{4}{q} + \frac{104}{q^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i = 5,062\,\%}$

C: $95,5 = \frac{3}{q} + \frac{103}{q^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i = 5,448\,\%}$

D: $101 = \frac{5}{q} + \frac{5}{q^2} + \frac{105}{q^3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i = 4,63\,\%}$

E: $102,1 = \frac{6}{q} + \frac{6}{q^2} + \frac{106}{q^3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i = 5,225\,\%}$

Bemerkung: Übrigens hat eine Anleihe E mit $n = 2$, $p = 10$ unter Nutzung der oben berechneten Spot Rates eine faire Bewertung von 108,466, wobei selbst bei höherem Kurs von z.B. 108,6 eine Effektivverzinsung von 5,46 % vorliegt (besser als C). (Möglicherweise ändern sich allerdings die in a) bzw. b) berechneten Spot Rates, wenn man die Anleihe E noch zusätzlich ins Portfolio nimmt.)

Andere Idee: Für jede Anleihe Rendite berechnen, in jeder Laufzeitklasse die beste auswählen. Dies muss allerdings nicht zur besten Lösung führen, da Renditen und Preise aus Zinsstrukturkurven zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen führen können (siehe frühere Aufgaben).

e) Anderer Cash Flow: 100, 100, 50

Primale LOA (P) (nur rechte Seiten ändern sich):

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} & 100x_1 & + & 98x_2 & + & 95,5x_3 & + & 101x_4 & + & 102,1x_5 & \to & \min \\ t=1: & 105x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & \geq & 100 \\ t=2: & & & 104x_2 & + & 103x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & \geq & 100 \\ t=3: & & & & & & + & 105x_4 & + & 106x_5 & \geq & 50 \\ & & & & & & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Dieselben Überlegungen wie in a) führen auf die optimale Lösung $x_1^* = 0,8984726$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0,94339623$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 0,47169811$, $z_P^* = 228,10197$.

Duale LOA (D) (nur Zielfunktion ändert sich):

$$\begin{array}{rcrcrcl}
100y_1 & + & 100y_2 & + & 50y_3 & \to & \max \\
105y_1 & & & & & \leq & 100 \\
4y_1 & + & 104 & + & & \leq & 98 \\
3y_1 & + & 103 & + & & \leq & 95,5 \\
5y_1 & + & 5y_2 & + & 105y_3 & \leq & 101 \\
6y_1 & + & 6y_2 & + & 106y_3 & \leq & 102,1 \\
 & & & & y_i & \geq & 0
\end{array}$$

Da in (P) dieselben Variablen x_1, x_3, x_5 (positive) Basisvariablen sind, müssen in (D) wegen der Komplementaritätsbedingungen auch dieselben Nebenbedingungen aktiv (d.h. als Gleichheit erfüllt) sein: 1., 3., 5. NB. Damit bleiben aber die Lösungen aus b) unverändert, denn an den NBen hat sich nichts geändert, und wir erhalten dieselben Diskontfaktoren und Spot Rates wie in b). Der optimale ZF-Wert lautet $z_D^* = 228,10197$ und stimmt mit z_P^* überein (starke Dualität).

Vermutung: Wenn nur der Cash Flow „groß genug“ angesetzt wird, so dass in der OA (P) die Nichtnegativitätsbedingungen nicht wirksam werden, sondern für die Basisvariablen gilt $x_i^* > 0$, so ist die Lösung von (P) in ihrer Struktur (welche Variablen sind BV) unabhängig vom konkreten Cash Flow. Folglich ist auch die Lösung von (D) unabhängig vom konkreten Cash Flow und liefert stets diejenigen Spot Rates, die (bei gegebenem Anleihe-Portfolio) zu günstigsten Bewertungen führen, d.h. den Cash Flow billigstmöglich sicherstellen.

3. a) Berechnung von Zerosätzen und Diskontfaktoren mittels „Bootstrapping“ gemäß der nachstehenden Formeln:

$$i_t = \left(\frac{100 + p_t}{100 - p_t \cdot \sum\limits_{k=1}^{t-1} d_k} \right)^{\frac{1}{t}} - 1, \qquad d_t = \frac{100 - p_t \cdot \sum\limits_{k=1}^{t-1} d_k}{100 + p_t} = \frac{1}{(1+i_t)^t}$$

$t = 1: \quad i_1 = 2,000\,\%, \qquad d_1 = \frac{1}{1{,}02} = 0,98039,$

$t = 2: \quad i_2 = \left(\frac{1{,}03}{100 - 3 \cdot 0{,}98039}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 3,0151\,\%, \qquad d_2 = \frac{1}{1{,}03151^2} = 0,94232$

$t = 3: \quad i_3 = \left(\frac{103{,}5}{100 - 3{,}5 \cdot (0{,}98039 + 0{,}94232)}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 3,5298\,\%, \quad d_3 = \frac{1}{1{,}035298^3} = 0,90116$

$t = 4: \quad i_4 = 4,0571\,\%, \qquad d_4 = 0,85293$

$t = 5: \quad i_5 = 5,3290\,\%, \qquad d_5 = 0,77137$

b) Hier liegt eine normale (monoton wachsende) Zinsstrukturkurve vor, weshalb die Forwardsätze jeweils höher als die Spot Rates sind. Dies wiederum bewirkt, dass die Kupons (um auf den Endtermin des zu konstruierenden Zerobonds bezogen werden zu können) mit diesen höheren Forward Rates aufgezinst werden. Deshalb sind die Zerosätze höher als die Swap-Sätze.

c) Sind die Swap-Sätze konstant für alle Laufzeiten, so sind sie identisch sowohl mit den Forward Rates als auch mit den Zerozinssätzen, d. h. es liegt eine flache Zinskurve vor.

Nachweis (für 2 Perioden; für n Perioden gelten dieselben Überlegungen mittels Induktion):

Falls $p_1 = p_2 \overset{\text{df}}{=} p$, so gilt: $i_1 = \frac{p}{100}$;

$$i_2 = \left(\frac{100+p}{100-p\cdot\frac{1}{1+\frac{p}{100}}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left[\frac{100+p}{100+p-p}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\right]^{\frac{1}{2}} - 1 = \left[\frac{(100+p)^2}{100^2}\right]^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$= \frac{100+p}{100} - 1 = \frac{p}{100} = \text{const.}$$

d) Geg.: $i_4 = 4,0571$, $i_5 = 5,3290$; 2 Monate entsprechen 60 Tagen bzw. $\frac{1}{6}$ Jahr;
mit j bezeichnen wir die Spot Rate für 4 Jahre und 2 Monate

(1) Interpolation der Zerosätze: $j = 4,0571 + \frac{1}{6}(5,3290 - 4,0571) = 4,2691\,\%$

(2) Interpolation der Diskontfaktoren ($d_4 = 0,85293$, $d_5 = 0,77137$):
$d_j = 0,85293 + \frac{1}{6}(0,77137 - 0,85293) = 0,839337 \overset{!}{=} \frac{1}{(1+j)^4(1+\frac{j}{6})}$

Mittels eines numerischen Verfahrens erhält man $j = 4,290\,\%$. (Achtung: Hier ist der berechnete Zerosatz **nicht kleiner** als der in (1) ermittelte.)

(3) Forward-based-Interpolation:
Aus dem Ansatz

$$1,040571^4 \cdot \left(1+\frac{i}{360}\right)^{360} = 1,05329^5$$

erhält man

$$i = 360\left[\left(\frac{1,05329^5}{1,040571^4}\right)^{\frac{1}{360}} - 1\right] = 10,044\,\%$$

(Achtung: Rechnungen sind numerisch sehr empfindlich!)
Aus dem Ansatz

$$1,040571^4 \cdot \left(1+\frac{0,10044}{360}\right)^{60} = 1,19222 \overset{!}{=} (1+j)^4\left(1+\frac{j}{6}\right)$$

ermittelt man $j = 4,307\,\%$.