Übung 4: Effektivverzinsung bei gebrochenen Laufzeiten, Zinsstrukturkurve - Lösung

1. a) ICMA-Methode:

A Laufzeit ganzzahlig, $P = \frac{1}{q^n}\left(R + \frac{p}{m}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\right)$, konkret: $110 = \frac{1}{q^9}\left(102 + 8\cdot\frac{q^9-1}{q-1}\right)$

q	rechte Seite
$1,0665$	$110,048$
$1,06656$	$110,00592$
$1,06657$	$109,99884$
$1,0666$	$109,977$

$\boxed{i_e = 6,66\,\%}$

B Laufzeit ganzzahlig, neue Periode = Halbjahr, $110 = \frac{1}{q^{18}}\left(102 + 4\cdot\frac{q^{18}-1}{q-1}\right)$

q	rechte Seite
$1,0333$	$110,072$
$1,03335$	$110,000$
$1,0334$	$109,929$

$\boxed{i_e = 1,0335^2 - 1 = 6,78\,\%}$

C Laufzeit gebrochen, $P + S = \frac{1}{q^f\cdot q^n}\left(R + \frac{p}{m}\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$, $f = \frac{178}{360} = 0,49444$,

$S = 5,75\cdot\frac{182}{360} = 2,91$, konkret: $85,20 + 2,91 = 88,11 = \frac{1}{q^{9,49444}}\left(100 + 5,75\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1}\right)$

q	rechte Seite
$1,0802$	$88,116$
$1,0803$	$88,095$
$1,0804$	$88,037$

$\boxed{i_e = 8,02\,\%}$ (evtl. $i_e = 8,03\%$)

D Laufzeit gebrochen, neue Periode = Halbjahr

$f = \frac{178}{180} = 0,98889$, $S = 5,75\cdot\frac{2}{180} = 0,03$

Ansatz: $85,23 = \frac{1}{q^{18,98889}}\left(100 + 2,875\cdot\frac{q^{19}-1}{q-1}\right)$

q	rechte Seite
$1,04$	$85,2614$
$1,0401$	$85,1428$

$\boxed{i_e = 1,04^2 - 1 = 8,16\,\%}$

b) SIA-Methode:

A siehe oben: 6,66 % **B** vgl. oben: $i_e = 0,03335\cdot 2 = 6,67\%$

C siehe oben: 8,02 %, **D** vgl. oben: $0,04\cdot 2 = 8,00\%$

c) US Treasury:

A siehe oben: 6,66 %, **B** siehe oben: 6,67 %

C $P + S = \frac{1}{1+f\cdot i}\cdot\frac{1}{q^n}\left(R + \frac{p}{m}\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

konkret: $88,11 = \frac{1}{1+0{,}49444i} \cdot \frac{1}{q^9}\left(100 + 5,75 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1}\right)$

q	rechte Seite
$1,0801$	$88,146$
$1,08016$	$88,111$
$1,0802$	$88,088$

$\boxed{i_e = 8,016\,\%}$

D Ansatz: $85,23 = \frac{1}{1+0{,}98889i} \cdot \frac{1}{q^{18}}\left(100 + 2,875 \cdot \frac{q^{19}-1}{q-1}\right)$

q	rechte Seite
$1,0400$	$85,26$
$1,0401$	$85,142$

$\boxed{i_e = 0,04 \cdot 2 = 8,00\,\%}$

d) Moosmüller-Methode:

A siehe oben: 6,66 %, **B** siehe oben: $6,78\%$

C siehe oben: 8,02 %, **D** vgl. oben: $i_e = 1,04^2 - 1 = 8,16\%$

2. a) (1): $\frac{6}{1{,}1} + \frac{6}{1{,}11^2} + \frac{106}{1{,}12^3} = 85,773$, (2): $\frac{12}{1{,}1} + \frac{12}{1{,}11^2} + \frac{112}{1{,}12^3} = 100,368$

   b) Der aus der Beziehung $\frac{6}{q} + \frac{6}{q^2} + \frac{106}{q^3} = 85,773$ ermittelte Effektivzinssatz lautet $i_e = q - 1 = 1,1192 - 1 = 11,92\,\%$; im Falle der zweiten Anleihe ergibt sich hingegen $i_e = 11,85\,\%$.

   c) Obwohl beide Anleihen mittels Spot Rates exakt bewertet (und bei dem berechneten Kurs somit gleichwertig) sind, täuscht das Effektivzinskriterium einen Wertunterschied von 0,07 % vor.

3. a) Die spot rates ergeben sich aus:

   $97.09 = 100\left(1 + \frac{1}{2}i_{0.5}\right)^{-1.0}$, $i_{0.5} = 5,99$; $94.22 = 100\left(1 + \frac{1}{2}i_{1.0}\right)^{-2.0}$, $i_{1.0} = 6.04$;

   $91.39 = 100\left(1 + \frac{1}{2}i_{1.5}\right)^{-3.0}$, $i_{1.5} = 6.09$; $88.60 = 100\left(1 + \frac{1}{2}i_{2.0}\right)^{-4.0}$, $i_{2.0} = 6.14$.

   Halbjährliche Diskontfaktoren aus Preisen ablesbar:

   $d_{0.5} = 0.9709, d_{1.0} = 0.9422, d_{1.5} = 0.9139,\ d_{2.0} = 0.8860.$

   b) Bewertung über Diskontfaktoren:

   $4.25 \cdot 0.9709 + 4.25 \cdot 0.9422 + 4.25 \cdot 9139 + 104.25 \cdot 0.8860 = 104.38$

   c) Aus der Gleichung

   $104.3802500 = 4.25\,(1 + 1/2\,i)^{-1} + 4.25\,(1 + 1/2\,i)^{-2} + 4.25\,(1 + 1/2\,i)^{-3} + 104.25\,(1 + 1/2\,i)^{-4}$

   erhält man mittels numerischem Verfahren $i_{eff} = 0.06139$. bei normaler Zinsstruktur werden Kupons nicht mit i_{eff} sondern mit den niedrigeren spot rates abgezinst, bei inverser ist es umgekehrt.

   d) $100.00 = p \cdot (0.9709 + 0.9422 + 0.9139 + 0.8860) + 100.00 \cdot 0.8860$ gibt $p = 3.07329$. Der par yield ist wegen halbjährlicher Zahlung $2 \cdot p = 6.14059$

4. Man dupliziere Bond D durch $0.03 \cdot A + 1.03 \cdot B$ und hat pro 100 Nennwert $0.03 \cdot 96.00 + 1.03 \cdot 91.00 = 96.61$ zu zahlen. Das ergibt gegenüber dem Preis für D von 98.00 einen risikolosen Gewinn von 1.39.

5. Wir finden die halbjährlichen Diskontfaktoren aus folgendem Prozeß:

   $100.38 = 104.00 d_{0.5}$, $103.78 = 5 d_{0.5} + 105 d_{1.0}$, $97.10 = 2.0(d_{0.5} + d_{1.0} + d_{1.5}) + 102.00 d_{1.5}$. Daraus ergeben sich $d_{0.5} = 0.9709615385, d_{1.0} = 0.9421446887, d_{1.5} = 0.9144488975$ Die halbjährlichen spot rates erhält man aus $(1 + \frac{1}{2} i)^{-n} = d_n$ zu $s_{0.5} = 5.981, s_{1.0} = 6.049, s_{1.5} = 6.052$.

6. Forward Rates: $r_{fn} = \frac{(1+r_{sn})^n}{(1-r_{s,n-1})^{n-1}} - 1$

   Per Definition: $r_{f1} = r_{s1} = 10\,\%$

   Forward Rate in einem Jahr (für ein Jahr): $r_{f2} = \frac{(1+r_{s2})^2}{(1+r_{s1})^1} - 1 = \frac{1{,}11^2}{1{,}1} - 1 = 12{,}01\,\%$

   Forward Rate in zwei Jahren (für ein Jahr): $r_{f3} = \frac{(1+r_{s3})^3}{(1+r_{s2})^2} - 1 = \frac{1{,}12^3}{1{,}11^2} - 1 = 14{,}03\,\%$