Übung 2: Klassische Finanzmathematik - Lösungen

1. Vorschüssig: $R = r(12+6,5i)$, nachschüssig: $R = r(12+5,5i)$

2. a) $E_5^{vor} = r \cdot q \cdot \frac{q^5-1}{q-1} = 4800 \cdot 1,0325 \cdot \frac{1,0325^5-1}{0,0325} = 26443.90$
$E_5^{nach} = 4800 \cdot \frac{1,0325^5-1}{0,0325} = 25611.53$
b) $E_5^{vor} = 400(12+6,5 \cdot 0,0325) \cdot \frac{1,0325^5-1}{0,0325} = 26062.40$
$E_5^{nach} = 400(12+5,5 \cdot 0,0325) \cdot \frac{1,0325^5-1}{0,0325} = 25993.03$

3. a) Vergleich der Barwerte zu Rentenbeginn
Einzahlungen: Jahresersatzrate vorschüssig
$R = 100(12+6,5 \cdot 0,045) = 1229,25$ $E = 1229,25 \cdot \frac{1,045^5-1}{0,045} = 6724,87$
Rente über 15 Jahre: Jahresersatzrate
$R = 30(12+6,5 \cdot 0,045) = 368,78$; BW-Rente $B = 368,78 \cdot \frac{1,045^{15}-1}{1,045^{15} \cdot 0,045} = 3960,48$.
Das Angebot rentiert sich nicht.
b) Berechnung der Rente und Aufteilung auf vorschüssige Monatsraten
$6724,87 = A \cdot \frac{1,045^{15}-1}{1,045^{15} \cdot 0,045}$, $A = 626,18 = r(12+6,5 \cdot 0,045)$; $r = 50,94$
c) n berechnen aus $6724,87 = 368,74 \cdot \frac{1,045^n-1}{1,045^n \cdot 0,045}$; ergibt ca. 39 Jahre.
d)Eigene Aufwendungen sind 100-27=73 €. Rechnung wie oben ergibt
$E = \frac{q^5-1}{q-1} \cdot 73(12+6,5q)$; $B = 30(12+6,5 \cdot q) \cdot \frac{q^{15}-1}{q^{15}(q-1)}$.
Gleichsetzen und Lösen der nichtlinearen Gleichung ergibt $q = 1,02154$ und damit eine Rendite von 2,15 %. Würde man 37 €/Monat erhalten, hätte man 4,44 %, also etwa die Rendite der alternativen Anlage.

5. (1): $B_6^{nach} = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{2000}{1,035^6} \cdot \frac{1,035^6-1}{0,035} = 10657.11$
(2): $B_6^{vor} = \frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = qB_6^{nach} = 11030.10$

6. 230 % Gewinn bedeutet: $K_{10} = 3,3K_0$. Aus $K_{10} = K_0 q^{10}$ ergibt sich $q = \sqrt[10]{3,3} = 1,1268$, d. h. eine jährliche Rendite von 12,68%.

Regelmäßiges (vorschüssiges) Sparen führt bei derselben Rendite auf einen Endwert von $E_{10} = 100(12+6,5 \cdot 0,1268) \cdot \frac{1,1268^{10}-1}{0,1268} = 23258$.

Nein, es gibt keinen Widerspruch. Herr Dr. XXX hat falsche Überlegungen angestellt.

7. $B_\infty^{nach} = \frac{r}{q-1} = \frac{1000}{1,04-1} = 25000$ $B_\infty^{nach} = \frac{1000}{1,07-1} = 14285.71$

8. a) (1): $B_\infty^{vor} = \frac{rq}{q-1} = \frac{1800 \cdot 1,06}{0,06} = 31800$, (2): $B_\infty^{nach} = \frac{r}{q-1} = 30000$
b) $B = \frac{r}{i-g} = \frac{1800}{0,06-0,04} = 90000$

9. $B = \frac{r}{i-g} = \frac{1500}{i-0.023} = 25000$, $i = 0.083$

10. $G = \underbrace{600 \cdot \frac{1,05^5 - 1}{1,05 - 1} \cdot \frac{1}{1,05^{10}}}_{Dividenden\ 1982-1986} + \underbrace{1.800 \cdot \frac{1}{1,05^{11}}}_{Dividende/Bonus\ 1987}$

$$+ \underbrace{800 \cdot \frac{1,05^4 - 1}{1,05 - 1} \cdot \frac{1}{1,05^{15}}}_{Dividenden\ 1988-1991} + \underbrace{20.800 \cdot \frac{1}{1,05^{15}}}_{EinnahmenausAktienverkauf} - 15.000 = -248,47$$

Die Investition ist unvorteilhaft, da G negativ ist.

12. $C = \frac{1}{q^n}\left(p \cdot \frac{q^n-1}{q-1} + 100\right) = \frac{1}{1,05^8}\left(6 \cdot \frac{1,05^8-1}{0,05} + 100\right) = 106,46$

13. $98 = \frac{1}{q^8}\left(6 \cdot \frac{q^8-1}{q-1} + 100\right) \quad \Rightarrow \quad 98(q-1)q^8 - 6(q^8-1) - 100(q-1) = 0$

$f(q) = 98q^9 - 104q^8 - 100q + 106 \overset{!}{=} 0, \qquad f'(q) = 882q^8 - 832q^7 - 100$

Das Newtonverfahren mit dem Startwert $q_0 = 1,062$ (z.B.) liefert in 2 Schritten den Wert $q = 1,0633$, was einer Rendite von 6,33% entspricht.

14. $C = f(q) = \frac{1}{q^n}\left(p \cdot \frac{q^n-1}{q-1} + 100\right)$

(1): $f'(q) = \frac{-n}{q^{n+1}}\left(p \cdot \frac{q^n-1}{q-1} + 100\right) + \frac{1}{q^n}\left(p \cdot \frac{(q-1)nq^{n-1} - (q^n-1)}{(q-1)^2}\right)$

$\bar{q} = 1,05$, $p = 6$, $n = 8$; $\qquad f'(\bar{q}) = -672,45$

$f(\bar{q} + \Delta q) \approx f(\bar{q}) + f'(\bar{q})\Delta q = 106,46 - 672,45 \cdot 0,0005 = 106,124$ (neuer Kurs)

(2) Exakt (Einsetzen von $q = 1,0505$ in obige Formel): $C_{neu} = 106,128$

15. Aus der obigen Kursformel ergibt sich nach Umstellung die Gleichung

$$F(C,q) = Cq^n(q-1) - p(q^n-1) - 100(q-1) = 0,$$

die eine implizite Funktion $q = \varphi(C)$ definiert. Mit
$F_C(C,q) = q^n(q-1)$ und $F_q(C,q) = nCq^{n-1}(q-1) + Cq^n - npq^{n-1} - 100$
erhält man $F_C(\bar{C},\bar{q}) = 0,10343$, $F_q(\bar{C},\bar{q}) = 62,53935$, woraus

$$\varphi'(\bar{C}) = -\frac{F_C(\bar{C},\bar{q})}{F_q(\bar{C},\bar{q})} = -\frac{0,10343}{62,53935} = -0,0016524$$

resultiert. Damit folgt
$q_{neu} = \varphi(\bar{C} + \Delta C) \approx \varphi(\bar{C}) + \varphi'(\bar{C}) \cdot \Delta C = 1,063262 - 0,0016524 \cdot 1 = 1,06161$
(2) Exakte Berechnung mittels numerischer Methoden aus der Beziehung

$$99 = \frac{1}{q^8}\left(6 \cdot \frac{q^8-1}{q-1} + 100\right)$$

liefert $q_{neu} = 1,0616207$.

Bemerkung: Alle Rechnungen müssten eigentlich mit noch höherer Genauigkeit ausgeführt werden, um sichere Ergebnisse zu erhalten.

16. Aus P wird $P_1 = \left(1 - \frac{s}{100}\right)P$ und daraus $P_2 = \left(1 + \frac{g}{100}\right)P_1 = \left(1 - \frac{s}{100}\right)\left(1 + \frac{g}{100}\right)P$.
Nach kurzer Umformung ergibt sich hieraus $g = \frac{s}{1 - \frac{s}{100}}$.
Speziell erhält man:

s	5	10	20	50
g	5,26	11,11	25	100