# Übung 1: Klassische Finanzmathematik - Lösungen

1. $K_{300} = 6000 \cdot \left(1 + 0,0325 \cdot \frac{300}{360}\right) = 6162,50$ € $K_{300} = 6000 \cdot \left(1 + 0,0325 \cdot \frac{300}{365}\right) = 6160,27$ €

2. $B = \frac{5000}{1+0,06 \cdot \frac{8}{12}} + \frac{6000}{1+0,06 \cdot \frac{11}{12}} = 10494,90$ € ; $B = \frac{5000}{1+0,06 \cdot \frac{240}{365}} + \frac{6000}{1+0,06 \cdot \frac{330}{365}} = 10501,49$ €

3. Barwertvergleich: $0,97R = \frac{R}{1+i \cdot \frac{14}{360}} \quad \Rightarrow \quad i = 0,7952871$, d. h. 79,53 %

4. kaufmännische Diskontierung: $Auszahlung = 30000 - 0,06 \cdot \frac{9}{12} = 28650,00$
   amtliche Diskontierung: $Auszahlung = \frac{30000}{1+0,06i \cdot} = 28708,13$
   Effektivzins: $28650,00 = \frac{30000}{1+0,06i}; i = 0,0628$

5. a) Zinssatz 10 %:
   $B_{(1)} = \frac{4000}{1+0,1\frac{3}{12}} + \frac{6000}{1+0,1\frac{9}{12}} = 9483,83$ €, $B_{(2)} = \frac{5200}{1+0,1\frac{2}{12}} + \frac{4700}{1+0,1\frac{8}{12}} = 9521,00$ €
   Obwohl die Gesamtzahlungen des 1. Angebotes größer sind, ist der Barwert des 2. Angebots höher; damit ist das 2. Angebot aus Verkäufersicht besser.

   Zinssatz 3 %: Mit analoger Rechnung ergeben sich die Werte $B_{(1)} = 9838,19$, $B_{(2)} = 9781,97$; hier ist das 1. Angebot besser.

   b) Gleichheit beider Angebote erhält man aus dem Ansatz $\frac{4000}{1+i\frac{3}{12}} + \frac{6000}{1+i\frac{9}{12}} = \frac{5200}{1+i\frac{2}{12}} + \frac{4700}{1+i\frac{8}{12}}$, woraus $i \approx 0,0711$ resultiert, was einer Verzinsung von ca. 7,11% entspricht. Man beachte aber, dass bei einem anderen Vergleichzeitpunkt bei **linearer Verzinsung** ein anderer Zins herauskommt!

   c) Endzeitpunkt als Vergleichstag liefert $4000(1+i\frac{6}{12}) + 6000 = 5200(1+i\frac{7}{12}) + 4700(1+i\frac{1}{12})$,
   Man erhält i= 7,01%

6. a) $K_{306} = 1000(1 + 0,03 \cdot 310) = 10300,00$, b) $K_{306} = 10000 \cdot (1 + 0,03)^{310} = 9539808,54$ [Taler]

7. $K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t} = \frac{2000}{1,0325^3} = 1817,02$ €

8. a) Ansatz: $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \stackrel{!}{=} 2K_0$; hieraus folgt $t = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}$, wobei $i = \frac{p}{100}$

   Man erhält:

| $p$ | 3 | 5 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $t$ | 23,45 | 14,21 | 9,01 | 7,27 |

   b) Aus obigem Ansatz und der Beziehung $\ln(1+x) \approx x$ (Taylorentwicklung für kleine Werte $x$) folgt: $t = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} \approx \frac{0,69}{i} = \frac{69}{p}$.

9. a) Eine jährliche Verzinsung von 6 % entspricht einer halbjährlichen Verzinsung mit 3 %, einer monatlichen Verzinsung mit 0,5 % etc. (relative unterjährige Zinsrate). Dies liefert:

$m = 1$: $K_1^{(1)} = 1,06K_0$, $m = 2$: $K_1^{(2)} = K_0 \cdot (1 + \frac{0,06}{2})^2 = 1,0609K_0$, $m = 4$: $K_1^{(4)} = 1,06136K_0$,

$m = 12$: $K_1^{(12)} = K_0 \cdot (1 + \frac{0,06}{12})^{12} = 1,06168K_0$, $m = \infty$: $K_1^{(\infty)} = K_0 \cdot e^{0,06} = 1,061836K_0$

b) Aus dem Ansatz $K_1^{(m)} = K_0 \cdot (1 + \frac{p_{eff}}{100})$ ergibt sich

| $m$ | 1 | 2 | 4 | 12 | 365 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_{eff}$ | 6 | 6,09 | 6,13 | 6,17 | 6,18 |

Eine Zinsintensität von $i^* = 0,06$ bei der stetigen Verzinsung liefert eine einmalige jährliche (Effektiv-) Verzinsung von $i = e^{i^*} - 1 = 0,0618$. Hingegen wäre die einer einmaligen Verzinsung mit 6% entsprechende Zinsintensität $i^* = \ln(1+0,06) = 0,0583$. Ansatz für die äquivalenten (konformen) Zinssätze: $(1 + i_{effp.a.}) = (1 + i_m)^m$. Daraus hat man:

| $m$ | 1 | 2 | 4 | 12 | 365 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_m$ | 6 | 2,96 | 1,47 | 0,49 | 0,0016 |

10. $K = 5000 \cdot (1 + 0,06)^5 = 6691,13$, ; Monatszins $i_{12} = 0,0049$. Endkapital wie erwartet $K = 5000 \cdot (1 + i_{12})^{5 \cdot 12} = 6691,13$. Mit relativem Zins $i_{mon} = \frac{0,06}{12}$ erhält man $K = 6744,25$. Effektiver Jahreszins aus $i_{eff} = (1 + 0,06/12)^{12} - 1 = 0.00617$ ist höher als 6%;

11. a) Die *spot rates* werden aus $P = \frac{T}{(1+i_k/2)^{\frac{k}{2}}}$ berechnet. Damit erhält man $i_{\frac{1}{2}} = 0,05994, i_{\frac{2}{2}} = 0,06043, i_{\frac{3}{2}} = 0.06093, i_{\frac{4}{2}} = 0,06144$.

    b) Die Diskontfaktoren sind aus den Preisen sofort abzulesen. Die Halbjahresrenditen werden durch Halbieren der obigen Zinssätze ermittelt.

    c) Die Zahlungen aus der Anleihe sind 4,25;4,25;4,25;104,25. Diese werden mit den Diskontfaktoren multipliziert. Der faire Preis ist $4,25 \sum_{k=1}^{4} d_k + 100,00 d_4 = 104,38$.