Analysis-Grundkurs (WS 02/03) - bearbeitet mit Maple 7
1. Übung

```
> restart:interface(version);
> with(plots):
```

*Maple Worksheet Interface, Maple 7.00, IBM INTEL NT, May 28 2001 Build ID 9\
6223*

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Aufgabe 2: Löse folgende Ungleichungen!

$10 \leq |x-2|$; solve(%)

$$\mathrm{RealRange}(12, \infty), \mathrm{RealRange}(-\infty, -8)$$

$|x+1| < |x|$; solve(%)

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(\frac{-1}{2}))$$

$|x+2| + |x-2| \leq 12$; solve(%)

$$\mathrm{RealRange}(-6, 6)$$

$1 < |x+2| - |x|$; solve(%)

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(\frac{-1}{2}), \infty)$$

$|x-1|\;|x-2| = 2$; solve(%)

$$3, 0$$

$|x| + |x+1| + |x-1| = 3$; solve(%)

$$1, -1$$

Aufgabe 3: Stelle die folgenden Gebiete grafisch dar!

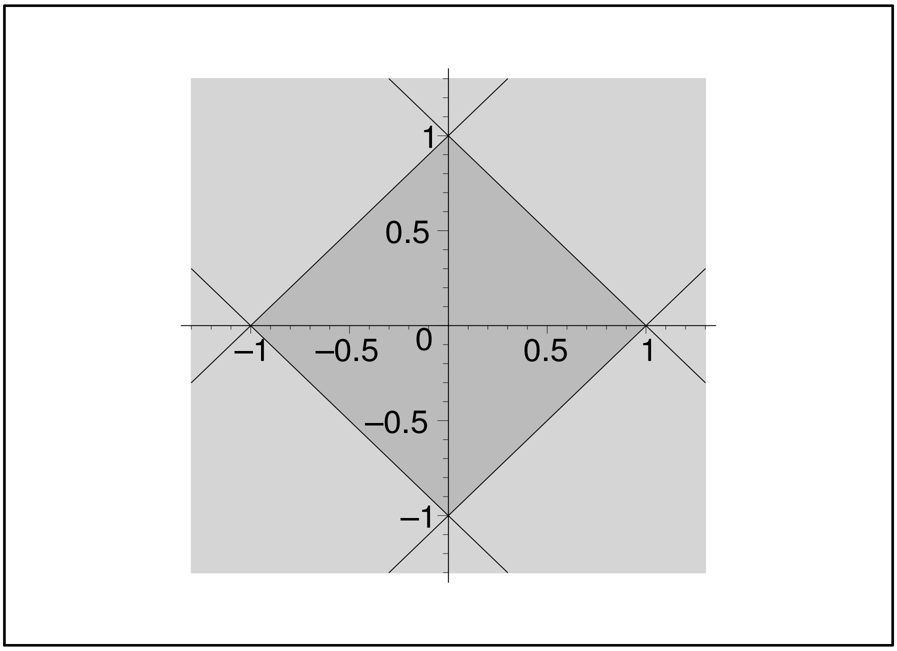
$g1 := |x| + |y| \leq 1$

```
> inequal( {g1}, x=-3..3, y=-3..3 );
```

```
Error, (in inequal) unable to compute coeff
```

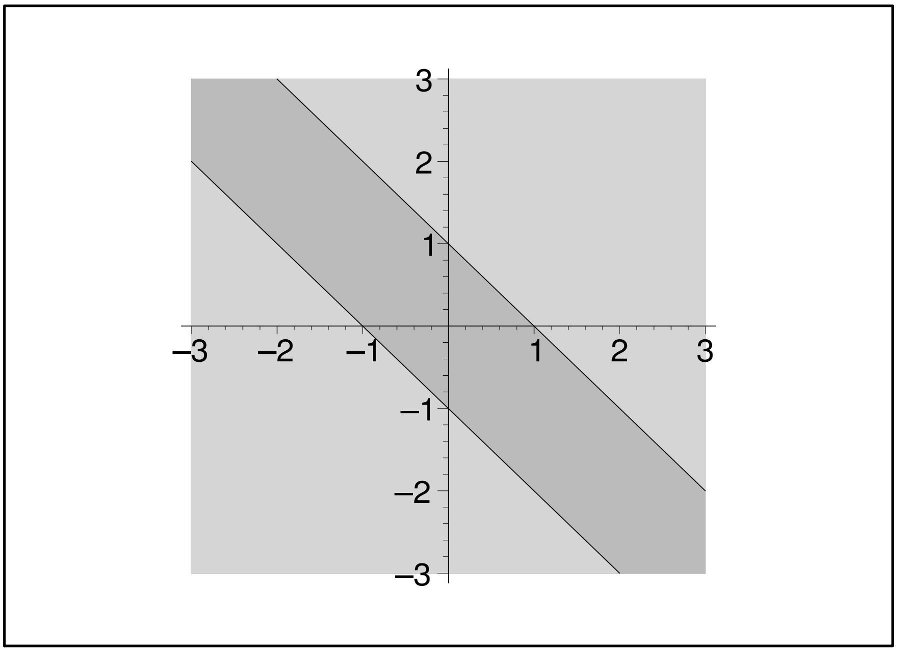
Maple produziert nichts, weil inequal nur lineare Ungleichungen zuläßt: Also Hand anlegen und die Fälle auseinandernehmen

```
> inequal({x+y<=1, x-y<=1, -x-y<=1, -x+y<=1},
> x=-1.3..1.3,y=-1.3..1.3,
> optionsexcluded=(color=wheat),scaling=constrained);
```



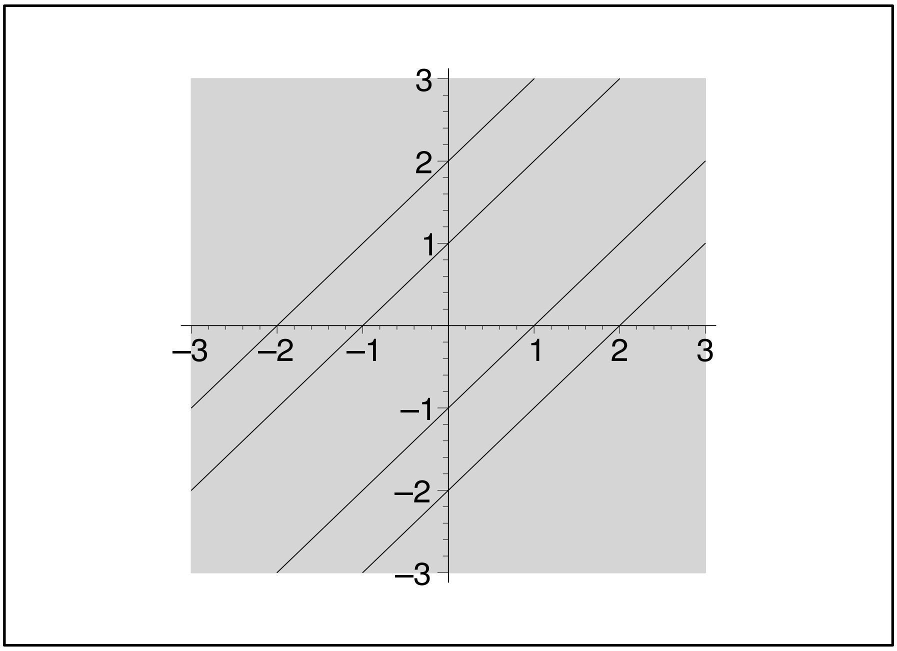
Analog

```
> inequal({x+y<=1, -x-y<=1}, x=-3..3, y=-3..3,
> optionsexcluded=(color=wheat),scaling=constrained);
```



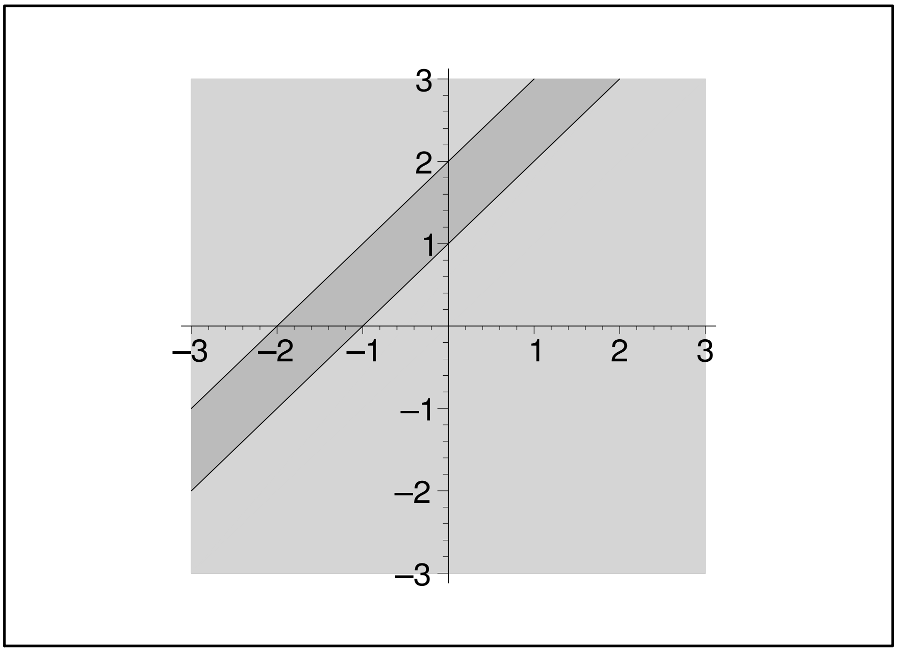
Maple zeichnet hier nur die Grenzen:

```
> inequal({x-y>=1,x-y<=2,-x+y>=1,-x+y<=2},
> x=-3..3,y=-3..3,optionsexcluded=(color=wheat),scaling=constrained);
```



Teilgebiet:

```
>  inequal({-x+y>=1,-x+y<=2},
>  x=-3..3,y=-3..3,optionsexcluded=(color=wheat),scaling=constrained);
```



Aufgabe 5: Löse folgende Gleichungen!

$g1 := \sqrt{x} + \mathrm{root}(x, 4) = 12$

```
>  solve(%,x);
```

$$81$$

$g2 := \log_{16}(x) + \log_4(x) + \log_2(x) = 7$

```
>  simplify(solve(%,x));
```

$$16$$

$gl3 := \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = 5$

```
> solve(%,x);
```

$$\frac{5}{13}$$

$g4 := \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} = a$; $g5 := \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y} = b$

```
> solve({g4,g5},{x,y});
```

$$\{x = \frac{1}{4}\,b^2 + \frac{1}{4}\,a^2, y = \frac{1}{2}\,b\,a\}$$

$g6 := (\frac{3}{7})^{(3x-7)} = (\frac{7}{3})^{(7x-3)}$

$$g6 := (\frac{3}{7})^{(3x-7)} = (\frac{7}{3})^{(7x-3)}$$

```
> solve(g6,x);
```

$$\frac{7\ln(\frac{3}{7}) - 3\ln(\frac{7}{3})}{3\ln(\frac{3}{7}) - 7\ln(\frac{7}{3})}$$

```
> restart:
> g7:=log[10](3^sqrt(4*x+1)-2^(4-sqrt(4*x+1)))-2=1/4*log[10](16)-sqrt(x
> +1/4)*log[10](4);
```

$$g7 := \frac{\ln(3^{(\sqrt{4x+1})} - 2^{(4-\sqrt{4x+1})})}{\ln(10)} - 2 = \frac{1}{4}\,\frac{\ln(16)}{\ln(10)} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4x+1}\ln(4)}{\ln(10)}$$

Maple rechnet sofort in den natürlichen Logarithmus um, findet aber eine Lösung nur in RootOf-Ausdrücken.

```
> lsg1:=solve(g7,x);
```

$$lsg1 :=$$

Man kann leicht eine reelle Lösung erhalten:

```
> evalf(%);
```

Für die exakte Lösung ist nur wenig Handarbeit nötig:

```
> simplify(map(x->x*ln(10),g7));
> solve(%);lsg:=simplify(%);
```

$$\ln(3^{(\sqrt{4x+1})} - 16\,2^{(-\sqrt{4x+1})}) - 2\ln(2) - 2\ln(5) = -\ln(2)\,(-1+\sqrt{4x+1})$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{\ln(6)^2 - \ln(216)^2}{\ln(6)^2}$$

$$lsg := 2$$

Probe:

```
> subs(x=lsg,g7);
> simplify(%);
```

$$\frac{\ln(3^{(\sqrt{9})} - 2^{(4-\sqrt{9})})}{\ln(10)} - 2 = \frac{1}{4}\,\frac{\ln(16)}{\ln(10)} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{9}\ln(4)}{\ln(10)}$$

$$-2\,\frac{\ln(2)}{\ln(2)+\ln(5)} = -2\,\frac{\ln(2)}{\ln(2)+\ln(5)}$$

Aufgabe 6: Löse folgende Ungleichungen!

$ugl1 := 9^{(x^2-3x-4)} \leq 3^{(4x^2-7x-14)}$

```
> lsg1:=solve(ugl1,x);
```

$$lsg1 := \mathrm{RealRange}(-\infty, \frac{1}{2}\frac{7\ln(3)-3\ln(9)-\sqrt{273\ln(3)^2-162\ln(3)\ln(9)+25\ln(9)^2}}{-\ln(9)+4\ln(3)}),$$
$$\mathrm{RealRange}(\frac{1}{2}\frac{7\ln(3)-3\ln(9)+\sqrt{273\ln(3)^2-162\ln(3)\ln(9)+25\ln(9)^2}}{-\ln(9)+4\ln(3)}, \infty)$$

Man hat den Eindruck, dass die Wurzelausdrücke noch zu vereinfachen sind. Das ist am einfachsten mit Ausschneiden und Kopieren möglich, aber es geht auch so:

```
> map(simplify,lsg1[1]);map(simplify,lsg1[2]);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \frac{-3}{2})$$
$$\mathrm{RealRange}(2, \infty)$$

Zu Fuß:

Logarithmieren:

```
> map(ln,ugl1);simplify(%,power);
```

$$\ln(9^{(x^2-3x-4)}) \leq \ln(3^{(4x^2-7x-14)})$$
$$\ln(9)\,(x+1)\,(x-4) \leq \ln(3)\,(4x^2-7x-14)$$

```
> t:=simplify(%);
```

$$t := 2\ln(3)\,(x+1)\,(x-4) \leq \ln(3)\,(4x^2-7x-14)$$

Alles auf die rechte Seite und auflösen:

```
> expand(map(x->x-lhs(t),t));solve(%,x);
```

$$0 \leq 2\ln(3)x^2-\ln(3)x-6\ln(3)$$
$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \frac{-3}{2}), \mathrm{RealRange}(2, \infty)$$

$ugl2 := 5^{(x+1)}-5^{(x+2)} < 2^{(x+2)}-2^{(x+3)}-2^{(x+4)}$

$$ugl2 := 5^{(x+1)}-5^{(x+2)} < 2^{(x+2)}-2^{(x+3)}-2^{(x+4)}$$

```
> solve(ugl2,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \infty)$$

Zu Fuß:

```
> combine(ugl2,power);t:=%/20;
```

$$-20\,5^x < -20\,2^x$$
$$t := -5^x < -2^x$$

```
> map(x->(-1)*x,%);#falsch!!!
```

$$5^x < 2^x$$

```
> solve(t,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \infty)$$

$restart$; $ugl3 := \sqrt{x-9}+\sqrt{5-x} < \sqrt{x+3}$

$$ugl3 := \sqrt{x-9}+\sqrt{5-x} < \sqrt{x+3}$$

Maple bringt keine Lösung, das kann bedeuten: Maple wei¯ keine oder es gibt keine.

```
> solve(ugl3,x);
```

Zu Fuß

Quadrieren:

```
> expand(map(x->x^2,ugl3));
```

$$2\sqrt{x-9}\sqrt{5-x} < x+7$$

Nochmal quadrieren:

```
> map(t->t+4,%);t:=expand(map(x->x^2,%));
```

$$2\sqrt{x-9}\sqrt{5-x} < x+7$$

$$t := 56x - 4x^2 < x^2 + 14x + 229$$

```
> map(t->t-56*x+4*x^2+180,t);
```

$$0 < 5x^2 - 42x + 229$$

```
> student[completesquare](%,x);
```

$$0 < 5(x - \frac{21}{5})^2 + \frac{704}{5}$$

Der Ausdruck ist immer positiv, also keine reelle Wurzel. Ohne Lösung der Gleichung ergibt sich das gleiche Ergebnis aus dem Durchschnitt der Definitionsbereiche.

$ugl4 := x - 4 < \sqrt{2 + x - x^2}$

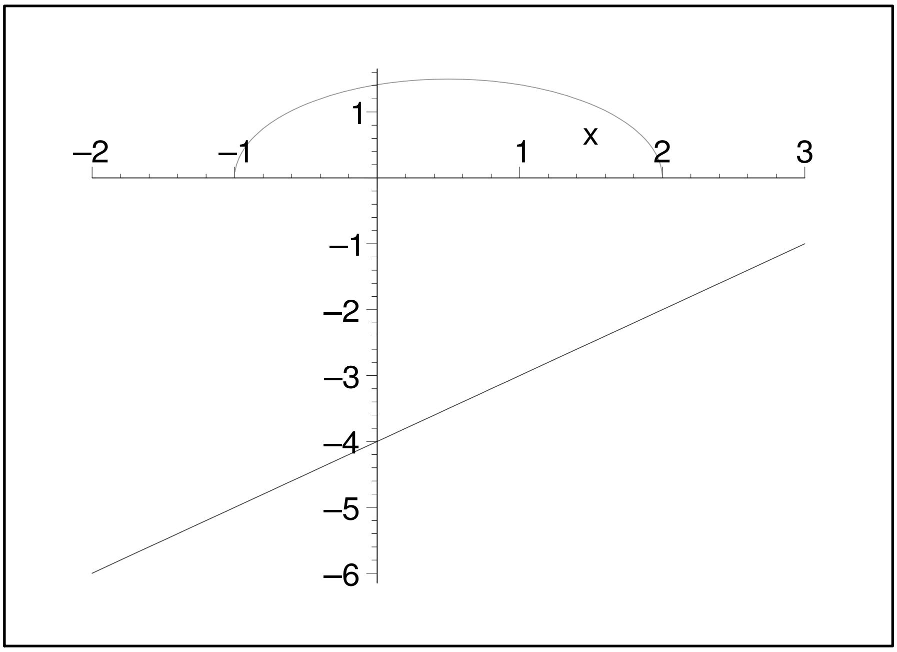
$$ugl4 := x - 4 < \sqrt{2 + x - x^2}$$

Der Definitionsbereich des Wurzelausdrucks ist [-1,2]. Deshalb kommt maximal dieser als Lösungsmenge in Betracht:

```
> solve(ugl4,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(-1, 2)$$

```
> f1:=lhs(ugl4):f2:=rhs(ugl4):
> plot({f1,f2},x=-2..3);
```




```
> solve(2+x-x^2);
```

$$-1, 2$$

Zu Fuß: Für x aus [-1,2] ist $x - 4 < 0$, deshalb kehrt sich beim Quadrieren das Ungleichheitszeichen um.

$2 + x - x^2 < (x - 4)^2$

$$2+x-x^2 < (x-4)^2$$

```
> t:=expand(%);map(t->t-x+x^2-2,t);
```

$$t := x-x^2 < x^2-8x+14$$

$$0 < 2x^2-9x+14$$

```
> student[completesquare](%,x);
```

$$0 < 2\,(x-\frac{9}{4})^2+\frac{31}{8}$$